República Oriental del Uruguay

ANALES

DE

LA UNIVERSIDAD

Entrega N.º 114

Administrador: G. VÁZQUEZ RODRÍGUEZ

SUMARIO: « La teoría de la relatividad », por el Ingeniero A. Geille Castro, Catedrático sustituto de Mecánica Racional.

AÑO 1924



MONTEVIDEO

IMPRENTA NACIONAL

1924

ANALES DE LA UNIVERSIDAD

AÑO XXXIII | MONTEVIDEO 1924 | ENTREGA N.° 114

La teoría de la relatividad

POR

A. GEILLE CASTRO

Catedrático sustituto de Mecánica Racional

Curso sintético libre dictado en la Facultad de Ingeniería durante los meses de Abril y Mayo de 1923

(VERSIÓN TAQUIGRÁFICA)

PALABRAS INAUGURALES

DEL

SEÑOR DECANO DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y RAMAS ANEXAS, INGENIERO DONATO GAMINARA

Cada vez que se constata un esfuerzo para guiar la enseñanza fuera de las prácticas impuestas por reglamentos y programas, debemos dar un entusiasta voto de aplauso, porque se contribuye a elevar la Institución, orientándola hacia ese desiderátum de formar un centro de atracción intelectual, por el mismo interés de los temas a tratarse.

Esta valiosa y desinteresada obra del Profesor Geille Castro nos proporciona una oportunidad excepcional a los que, sin habernos dedicado a estudiar el mundo einsteniano, estamos ávidos de conocer la nueva teoría.

A pesar del noble esfuerzo del conferencista, no puede pretenderse que con solo asistir a este cursillo, se llegue a dominar el fondo del asunto, pues para ello sería necesario tener una preparación especial, basada en conceptos enteramente distintos a los que conocemos.

Sabiendo ya que la tarea de explicar el relativismo no es fácil, sólo me resta significar que el Profesor Geille es uno de nuestros colegas que más se ha dedicado a las matemáticas y a la Mecánica, de manera que su palabra es una de las más autorizadas para tratar el tema.

En nombre de la Facultad, cúmpleme agradecer al señor Geille su meritísima obra de extender la enseñanza al mundo tetradimensional.

ADVERTENCIA

La redacción de estas lecciones deja mucho que desear. En primer término, el lector encontrará en ellas la forma de expresarse de la persona que habla y no de la que escribe; luego, el giro de la frase es a menudo poco elegante y existen repeticiones. Esto se debe a que se trata de una versión taquigráfica, corregida solamente de una manera muy superficial.

A. G. C.

LECCIÓN I

SUMARIO: **Preliminares. — Historia de la Teoría de la Relatividad. — Datos biográficos sobre Alberto Einstein.**

Creo que en la historia del mundo no habrá habido ningún descubrimiento de ciencia pura que haya despertado un interés mayor que el producido por el de Einstein. Los inventos que se traducen en realidades prácticas, despiertan la curiosidad y la admiración del público, y eso es lógico. Que un Marconi, con su telegrafía y telefonía inalámbricas; que un Carrel, con su transplantación de órganos en los seres animados, hayan provocado ese interés, es natural, puesto que sus descubrimientos se transforman en realidades materiales que constituyen un factor de adelanto para la sociedad y para la cilivización. Pero hasta ahora, los descubrimientos de ciencia pura no habían traspasado los límites estrechos de los gabinetes y laboratorios, sino muy lentamente y de una manera harto vaga.

El invento de Einstein ha roto los moldes de esa antigua costumbre; ha trascendido rápidamente de los hombres de ciencias al público en general, y la teoría es, en la actualidad, comentada vivamente en todos los círculos del hemisferio norte. Se habla de la nueva doctrina, no sólo en los círculos científicos, sino en los artísticos, y hasta en los sociales, aunque podemos suponer con qué conocimiento de causa en algunos de ellos.

Nuestro país ha andado un poco atrasado en este asunto, y eso depende de dos causas. En primer lugar, se trata de una nación joven, que está más atenta a las conquistas de la industria que a los descubrimientos de la ciencia. Luego,

estamos muy alejados de los centros intelectuales europeos, y eso hace de modc que las noticias y los libros nos lleguen con un atraso considerable.

Se ha hablado mucho de la dificultad de comprensión de la Teoría de la Relatividad, existiendo, respecto a ésto dos opiniones diametralmente opuestas. Primeramente está la de los sabios que han contribuído a formar la teoría, los cuales dicen que si ésta no es incomprensible, poco le falta para serlo. Especialmente hay una afirmación, atribuída al mismo Einstein, que dice que en el mundo no existirán más de una docena de personas capaces de comprender su teoría. Creo firmemente que Einstein no pudo haber dicho semejante cosa, aunque más no fuera, por modestia; pero el hecho de encontrarse esa frase en el prefacio de un folleto cuyo autor es nada menos que el gran Lorentz, hace que sospechemos que debe tener algún fundamento.

Por otro lado está la opinión del vulgo, que supone que la teoría es fácil, como lo prueba el hecho de que sea tópico de conversaciones en todos lados. No es raro encontrar por ahí algunos jóvenes que, sin mayores conocimientos previos, dicen que la teoría es sencilla, basados en la lectura de algún pequeño libro de divulgación. Todos los extremos son malos: debemos colocarnos en un justo término medio. La teoría de Einstein es difícil, pero no incomprensible, y las razones de esa dificultad son las que vamos a exponer.

En primer lugar está la razón, inherente a toda cuestión de ciencia pura y superior, que no encuentro traducida de mejor manera que en esta frase, que voy a leer de un discurso del sabio alemán Klein, pronunciado en Viena en el año 94, con motivo de una sesión recordatoria del matemático Riemann. Dice así: "Las concepciones de las cuales nos ocupamos son el producto de un trabajo prolongado del pensamiento matemático y están muy alejadas de los pensamientos que son de uso corriente en la vida".

En segundo lugar, la teoría es difícil porque se necesita para estudiarla una serie de conocimientos previos. Generalmente una doctrina de una ciencia determinada, se basa solamente en esa ciencia. Con la de Einstein no sucede eso:

es una teoría de proyecciones tan enormes, tan universales, que abarca la casi totalidad de las ciencias llamadas exactas. Así es que para su comprensión se necesita una cantidad de conocimientos de las ciencias más diversas, difíciles de reunir en una misma persona, sin un fin preconcebido.

En tercer término, — y es la dificultad mayor, — la Teoría de la Relatividad produce, como ya se ha repetido hasta la saciedad, el derrumbe de muchos conocimientos anteriores: que la distancia entre dos puntos, que era una cosa que no se dudaba fuera constante, resulte variable; que el tiempo, cuya constancia tampoco se discutía, resulte igualmente variable; que la masa, tan luego la masa, y con ella el peso, sean cantidades fluctuantes, que dependen, como la distancia y el tiempo, de la velocidad y de la gravitación, son cosas que ultrapasan por completo nuestro entendimiento. Pero, si por un lado observamos que esas variaciones son infinitamente pequeñas en los casos corrientes, hasta pasar desapercibidas, y que se hacen solamente visibles en casos muy especiales de ciencia pura: cuestiones astronómicas y físicas; y si, por otra parte, nos interiorizamos en las causas que determinan esa variabilidad, uno va poco a poco acostumbrándose, y acaba por encontrar todo eso lógico. y por creer justamente que lo que anteriormente sabíamos, no lo era. Es una transformación radical del entendimiento, que necesita para cumplirse tiempo y estudio. Se precisa además otra cosa: cierta agilidad cerebral, no poseída por todos. La agilidad mental es una cosa que proviene, en primer lugar, de la idiosincracia particular de cada persona; en segundo término, de su juventud, y en tercer lugar, y principalmente, del ejercicio a que está sometido el cerebro. Cerebros de personas de edad madura, que se han conservado ágiles por un estudio continuado, por una gimnasia intelectual intensa, están perfectamente aptos y capacitados para amoldarse a las nuevas ideas.

Es natural que, para la comprensión de la Teoría de la Relatividad, resulte una cosa sumamente ventajosa tener un guía: una persona que, habiendo estudiado la doctrina, sepa espigar en la intrincada maraña de la bibliografía escrita,

escogiendo la demostración más concreta, la explicación más satisfactoria, el razonamiento más inatacable, y los ordene lógicamente, exponiéndolos con claridad y en forma didáctica. Esa es, simplemente, la misión que nos hemos propuesto.

Voy a empezar ahora, con una pequeña reseña histórica de la Teoría de la Relatividad. Tenemos que remontarnos para eso hasta principios del siglo XVII.

En el año 1600 vivían en Europa, simultáneamente, dos genios: Galileo y Kepler. El primero, arrojando desde lo alto de la torre inclinada de Pisa, materiales de distintas sustancias, llegó a probar la propiedad intrínseca de la gravedad, que consiste en comunicar una aceleración igual a todos los cuerpos. El segundo descubrió las leyes geométricas a las cuales están sometidos los planetas en su movimiento alrededor del Sol.

Poco tiempo después, apareció Newton, el que, a mi entender, es el genio más completo, más indiscutible y más universal que haya existido en los últimos siglos. Padre de la Mecánica y del Cálculo Infinitesimal, cuya gloria comparte con Leibnitz, todas las ciencias exactas le deben contribución importante. Realmente, para hacer frente a hombre de esa talla, se necesitaba un Einstein.

La vida de Newton fué pródiga en descubrimientos, fué larga, fué laboriosa y fué fecunda. Durante toda su existencia no hizo más que producir, siempre arrancándole a la ciencia, ávido de verdades, aquellas que encerraba. Newton, no conforme con conocer la manera con que los cuerpos caen a la tierra; no contento con saber las leyes geométricas a que están sometidos los planetas al describir sus órbitas, quiso algo más: una ley general, una ley universal que explicara, de un modo concreto, el movimiento de todos los astros del universo; y en esa forma descubrió su famosa ley de gravitación universal, la cual, a pesar de encontrarse hoy, no digamos anulada, pero sí modificada sustancialmente por la teoría de Einstein, perdura siempre como uno de los monumentos más grandiosos de la ciencia.

Poco después, en 1675, el astrónomo danés Roemer. observando los eclipses de los satélites de Júpiter, detrás del astro,

observó que las fechas de esos eclipses se adelantaban en las oposiciones y se atrasaban en las conjunciones sobre las dadas por las tablas de Cassini, de reputación mundial, que no habrían sido nunca encontradas en defecto.

Roemer, con una claridad de criterio extraordinaria, dedujo de allí que la luz viaja con una velocidad finita, contra la idea que predominaba anteriormente de que se propagaba en forma instantánea, y atribuyó a eso el hecho de que, en las oposiciones, estando Júpiter más cerca de la Tierra, tardaba menos tiempo en llegar su luz que en las conjunciones, por la diferencia de distancia, constituída por el diámetro de la órbita terrestre.

En aquel tiempo existían sobre la naturaleza de la luz, dos hipótesis contrarias y excluyentes: la de la emisión, de Newton, y la de las ondulaciones, de Huyghens. Newton suponía que la luz estaba formada por una serie de corpúsculos microscópicos que, arrojados por el foco luminoso, venían a herir nuestra retina, corpúsculos que debían ser completamente elásticos para que pudieran producir el fenómeno conocido de la reflexión. La teoría de Huyghens afirmaba, por lo contrario, que la luz estaba constituída por vibraciones, ondulaciones de un medio ambiente que sería el éter, que se desarrollaban tal como las ondas que se forman en el agua tranquila cuando se arroja a ella una piedra.

Si la primera de las dos hipótesis no hubiera sido de Newton, no habría podido subsistir. En efecto, al poco tiempo, se descubrieron ciertos fenómenos como las interferencias y la difracción, que no podían ser explicados por ella; pero Newton era el padre de esa teoría, y por eso, ella tenía partidarios: la figura de aquel genio era tan grande que los hombres de ciencia no podían admitir que estuviera equivocado. Para explicar esos fenómenos nuevos, Newton complicó enormemente su doctrina, y en esa forma consiguió hacerlo aceptablemente. Pero los descubrimientos en óptica se venían sucediendo con rapidez y la teoría de la emisión acabó por ser inaceptable para todos. Especialmente el ingeniero francés Fresnel, en 1819,—había transcurrido algún tiempo,—y después Foucault, en 1854, con una serie de experimentos su-

mamente interesantes e ingeniosos, vinieron a dar por tierra con la teoría de Newton, y a proclamar como única y verdadera la de las ondulaciones de Huyghens.

En el año 1840, Faraday, estudiando la electricidad, que recién estaba en estado embrionario, descubrió que las atracciones y repulsiones eléctricas y magnéticas no obraban instantáneamente a distancia como se había creído hasta entonces, sino que lo hacían con velocidad finita, por medio de una sustancia interpuesta, que sería también el éter. Faraday, que era eminente físico, pero mal matemático, no supo expresar su trabajo por medio de fórmulas. Maxwel, el gran Maxwel, tomó las conclusiones de Faraday para darles una traducción matemática, y trabajando sobre ellas, y habiendo fijado dos sistemas de unidades, el electro-estático y el electro-magnético, observó que el cociente de los valores de una misma cantidad, apreciada en esas dos clases de unidades, resultaba ser la velocidad de la luz. Según la frase de Fabre, lanzado a la búsqueda de pepitas de oro, tropezaba con un diamante. Maxwel, siguió investigando, hasta establecer sus famosas ecuaciones, las ecuaciones clásicas que indican la relación entre la intensidad electro-estática y la electro-magnética de un cuerpo cargado.

La obra de Maxwell es tan importante, es tan superior, que para definirla basta solamente constatar un hecho. De las ecuaciones de la mecánica; de las ecuaciones de la electricidad; de las ecuaciones, puede decirse, de la física entera, después de la teoría de la Relatividad, no subsiste más que un solo grupo de fórmulas: todas las demás han sido atacadas, si no en sus resultados prácticos, al menos en su forma teórica. Y ese grupo de fórmulas que subsiste sin ataque y sin reproche, es el de Maxwel, las únicas que han podido resistir esa prueba.

En ese estado de cosas se podía afirmar ya que la luz era simplemente un fenómeno electro-magnético, que las ondas luminosas no eran más que ondas electro-magnéticas de una naturaleza especial.

El físico holandés Hendrick Lorentz,—y aquí llegamos ya a cosas contemporáneas, — que es el precursor de Einstein,

utilizando las ecuaciones de Maxwell, trató de transformar esas ecuaciones de manera que pudieran aplicarse, no ya a un cuerpo en reposo, sino a uno en movimiento, tratando que ellas una vez transformadas, resultaran de la misma forma que las anteriores; encontró que eso le era fácil si en lugar de tomar el tiempo constante, al hacer el cambio, empleaba uno ficticio, que él llamó "tiempo local". Era un artificio matemático: el tiempo al pasar de un sistema de coordenadas a otro debía ser sustituído por uno nuevo, que era función del anterior y también de la velocidad del cuerpo. Ese tiempo local, que para Lorentz no pasó de ser un simple artificio matemático, adoptado con el único objeto de obtener ecuaciones de una misma forma, es el que después Einstein empleó como tiempo verdadero. Pero Lorentz, en su transformación, no obtuvo más de una aproximación de primer grado. Larmor, después, siguió trabajando sobre el mismo tema y consiguió darle una aproximación mayor.

En esa época, 1904, se repitió en Estados Unidos el experimento de Michelson y Morley. Esta experiencia estaba destinada a tratar de hallar la velocidad de la tierra con respecto al éter, y había sido hecha por primera vez por los sabios nombrados en el año 1887. Consistía en lo siguiente: se medía por medios que veremos en detalle más adelante, el tiempo empleado por un rayo luminoso en hacer dos recorridos de igual longitud, uno en el sentido del movimiento de traslación de la Tierra, y otro en sentido transversal. Si el éter en el cual viaja la luz no fuera arrastrado por la Tierra, ese rayo luminoso tendría que sufrir un atraso en su primer recorrido; en cambio, en el sentido transversal, ese atraso no existía o era insignificante. Sin embargo, no se pudo encontrar diferencia alguna y eso parecía implicar que el éter era totalmente arrastrado por la Tierra en su movimiento, puesto que el rayo de luz mantenía su velocidad constante. Sin embargo, esta afirmación era contraria a experimentos anteriores, tan célebres con el de la aberración. En el año 1728 el astrónomo Bradley, observando las estrellas por medio del telescopio, descubrió que si enfocaba el astro al centro del objetivo, la imagen no se producía en el cruce de los hilos del

retículo, sino que aparecía desviada, atribuyéndose ese fenómeno al movimiento de la Tierra con respecto al éter, inmóvil. El rayo de luz que viajaba en el éter, sufría una desviación debido al movimiento del aparato arrastrado por nuestro planeta, y por eso la imagen aparecía excéntrica. Ese fenómeno demostraba, de una manera categórica, que el éter estaba inmóvil. Pero había una complicación mayor: una hipótesis intermedia

Fresnel, haciendo experimentos sobre la velocidad de la luz en los medios en movimiento, llegó a determinar que el éter no estaba inmóvil ni era totalmente arrastrado por los cuerpos, sino que sufría un arrastre parcial y de aquí descubrió su famoso "coeficiente de arrastre". Así que existían tres hipótesis sobre la movilidad del éter: la primera, deducida de la aberración, afirmaba que el éter era inmóvil; la segunda, de Fresnel, aseguraba que él era parcialmente arrastrado, y la tercera, consecuencia del experimento de Michelson, decía que el éter era totalmente arrastrado por la Tierra.

A pesar de este último experimento, los hombres de ciencia no quisieron aceptar su consecuencia y siguieron sosteniendo, de acuerdo con la aberración, que el éter era inmóvil.

La experiencia de Michelson y Morley, fué repetida diversas veces siempre con aparatos más perfeccionados, hasta la última —1904 —que ya mencionamos, que fué cuando llamó la atención de Lorentz. En esta ocasión, la sensibilidad del aparato era tal, que podía haber acusado una velocidad de tres kilómetros por segundo, es decir, la décima parte de la de la Tierra en su movimiento alrededor del Sol. En consecuencia, no podían existir dudas sobre la exactitud de los resultados: lo que sucedía era, sin discusión, que la velocidad de la luz era la misma en un sentido que en el otro.

Para poder explicar este fenómeno, sin abandonar la hipótesis de la inmovilidad del éter, Fitzgerald—sabio irlandés — primero, en una conversación privada a la que no dió mayor importancia, y Lorentz, después, sin conocimiento, según parece, de lo que había dicho el otro — uno estaba en Irlanda y el otro en Holanda — afirmaron una cosa extraordinaria: que la única explicación posible de que el tiempo empleado por el rayo de luz en dos recorridos que debían

ser distintos, resultara igual, era que el camino material del rayo, la distancia entre los espejos del aparato, y con él todos los cuerpos que están sometidos a un movimiento con una velocidad determinada, sufrían una contracción en el sentido del movimiento, permaneciendo las demás dimensiones, fijas.

Era una hipótesis realmente asombrosa; para nosotros, acostumbrados siempre a considerar las longitudes como constantes, la afirmación de que un cuerpo que marcha a determinada velocidad se acorta en el sentido del movimiento, sin sufrir contracciones en los demás sentidos, es una cosa que realmente sobrepasa nuestro poder de comprensión. Sin embargo, esa hipótesis extraordinariamente audaz encontró secuaces, y Lorentz trató de aprovecharla para completar su transformación de las ecuaciones de Maxwel, que aún no era rigurosamente exacta.

Pero en esa hipótesis de la contracción había una falta primordial que era la siguiente: ¿cómo se podía explicar que el acortamiento de los cuerpos fuera igual para todos, cualquiera que fuese la sustancia de que estuvieran constituídos? Era más inadmisible aún que un cuerpo de una sustancia se contrajera de la misma manera que otro de una diferente, porque el acortamiento implicaba modificación de la materia de que estaba compuesto. Para poder salvar esa objeción importante, Lorentz ideó la teoría de los electrones. Según ella, los cuerpos están formados por átomos, los cuales, a su vez, vienen a ser, en miniatura, sistemas planetarios con sus soles centrales y una serie de planetas girando alrededor, los que se llaman electrones. La sustancia de los electrones es la misma para todos los cuerpos, y la diferencia aparente de ellos es producto de la diferencia en el número de esos planetas microscópicos, y su disposición. En esa forma, él rebatía victoriosamente la objeción primordial a su hipótesis: si todos los cuerpos estaban constituídos, en el fondo, de la misma sustancia, era lógico que se acortaran de la misma manera.

Aplicando la contracción que había ideado a la transformación de las ecuaciones de Maxwell, en las cuales trabajaba, llegó Lorentz a un resultado exacto. Queremos decir que al

hacer la transformación de dichas ecuaciones, de un cuerpo en reposo a uno en movimiento, empleando no sólo el tiempo local, aquel artificio matemático que él había creado, sino también la contracción, llegaba a obtener ecuaciones exactamente de la misma forma que las primitivas, y con una exactitud rigurosa.

En este estado de cosas, aparece en el escenario de la Ciencia una estrella de primera magnitud: es Einstein.

Alberto Einstein, descendiente de familia judía, nació en Ulm, Alemania, en el año 1879; cuenta pues en la actualidad cuarenta y cuatro años. De niño, su padre, que era electrotécnico de oficio, se trasladó a Mónaco de Baviera, donde abrió una casa de electricidad. Allí cursó Eistein sus primeros estudios, en la escuela elemental primero, en el gimnasio, después. Las referencias que tenemos de esos tiempos, lo pintan como un jóven normal: no era un niño prodigio; nada de esos descubrimientos, de esas concepciones de Pascal y de Newton en su adolescencia. Poseemos dos referencias interesantes, de maestros del colegio, que dicen lo siguiente: "Tiene muchas buenas cualidades y manifiesta un especial interés en las matemáticas, en cuya ciencia sobresale". Año 93, catorce años. La otra: "Parece tener óptimas cualidades, pero no es muy inclinado al estudio". Año 94, quince años. Hasta esa época no se había descubierto en él lo que debía ser más adelante.

A consecuencia de un revés financiero, la familia de Einstein emigró a Italia, y su padre tuvo que trabajar como electricista. El joven, encontrando ya en esa época, estrechos los límites dentro de los cuales estaba encerrado, se trasladó a Suiza, y allí, ayudado por un tío ingeniero y dando lecciones particulares, empezó a prepararse para ingresar en la Escuela Politécnica de Zürich. Ingresó, cursó, sus estudios, y salió doctorado de ella en 1900. Entonces se hizo ciudadano suizo, renunciando a su país de origen. Después ha sido profesor en varias universidades: en la misma Zürich, en Praga y en Berlín. Actualmente tiene una cátedra en esta última ciudad, en la cual desarrolla los tópicos que se le ocurren, y a la cual asiste, como es de suponer, un numeroso y selecto auditorio.

Eistein encontró el estado de cosas tal como lo había dejado Lorentz, y, mortificado por el hecho de que este físico aceptaba todavía cuerpos en reposo y cuerpos en movimiento, es decir, sistemas de ejes privilegiados, cuando él suponía que no se podía dilucidar cuáles estaban en reposo y cuáles en movimiento; que sólo existían cuerpos en movimiento relativo unos con respecto a otros, emitió en un escrito, publicado en una simple revista física del año 1905, la hipótesis de que el tiempo local, simple artificio establecido por Lorentz, ya sabemos con qué fin, no era una ficción, sino que era el tiempo real; que ese tiempo, función del tiempo en el otro sistema de ejes, y también de la velocidad, era aquel por el cual debía guiarse un observador en ese nuevo sistema. Así que el tiempo resultaba ya variable de un sistema de ejes coordenados a otro.

Observó también que la contracción de Lorentz existía, pero no en forma de un fenómeno físico inherente a la sustancia de los cuerpos, sino debida a la manera como se medía la distancia; pero que existía en realidad: que un observador, al ver pasar por delante de él un móvil animado de cierta velocidad, juzgaba que un metro colocado en él, en el mismo sentido del movimiento, sufría un acortamiento.

En esa forma Eistein fundó su principio de la relatividad restringida, diciendo que no había sistemas de ejes privilegiados; que todos eran igualmente válidos. Como se vé, en este punto ya el tiempo estaba íntimamente ligado a las dimensiones del espacio. Resultaban en realidad, en lugar de tres variables X, Y, Z, por un lado, y la cuarta, T, por otro, como en la mecánica clásica, cuatro variables, porque el tiempo era función de las coordenadas, como a su vez éstas lo eran de aquel. Pero Einstein, para hacer perfecta esa unión de las coordenadas en un solo grupo, necesitaba una ayuda matemática, que le trajo Minkowski.

Minkowski, el célebre matemático alemán, en las postrimerías de su vida, un año antes de morir, impresionado por la obra de Einstein, afirmó que ya no se podía hablar de coordenadas de espacio y de tiempo separadamente, sino que las cuatro variables debían formar un conjunto único e indivisible, conjunto que constituía el mundo tetradimensional. No

2.

sólo expresó eso, sino que llevó adelante su trabajo, tratando de hacer concebir ese mundo de cuatro dimensiones, que parecía inconcebible. Einstein, utilizando el trabajo de Minkowski, hizo que la teoría de la relatividad adelantara hasta llegar a una perfección absoluta. Era la teoría de la relatividad restringida, porque no comprendía la gravitación ni la aceleración; se trataba de ejes en movimiento rectilíneo y uniforme.

El hecho de que la doctrina no incluyera la gravitación, fenómeno universal, ni la aceleración, fenómeno general también, mortificaba a Einstein. El quería un principio más amplio; quería una doctrina que involucrara, no sólo los sistemas en movimiento uniforme, sino aquellos dotados de movimiento cualquiera, sometidos o no a la gravedad.

En 1911 empezó Einstein a trabajar sobre esto y tuvo que echar mano como antes, de la ayuda matemática. Empleó la geometría no enclidiana, especialmente la de Riemann, empapándose en las concepciones de ese gran hombre, el cual no tuvo tiempo de desarrollarlas por completo antes de que lo sorprendiera la muerte. Empleó también, por el lado del cálculo, los trabajos de Christoffel hechos en el año 1869 sobre las ideas del mismo Riemann, y terminados después por dos matemáticos contemporáneos italianos: Ricci y Levi-Civita, trabajos que forman el llamado Cálculo Diferencial Absoluto o Teoría de los Tensores.

Las fórmulas de éstos hombres de ciencia, que ellos nunca creyeron pudieran tener aplicación práctica, constituyendo una simple especulación matemática, fueron utilizadas por Einstein, quien las incluyó en su teoría, pudiendo así completar el principio de la relatividad generalizada. La gravitación, que había estado siempre aislada en la mecánica clásica, separada del resto de la ciencia por sus caracteres peculiares, venía a formar, ahora, parte del cuadro general entrando en las fórmulas fundamentales.

Los trabajos de Einstein sobre la segunda parte de su doctrina, terminaron en 1915; tardaron tres años, hasta el armisticio, en cruzar las fronteras de Alemania. Recién en 1918, llegaron a las demás naciones europeas, y fueron objeto del estudio y del comentario de los hombres de ciencia, unos partidarios, otros opositores.

Después de eso, Einstein ha repartido su tiempo entre el estudio y los viajes; ha ido a Norte América, a Italia, a Inglaterra y, según dicen, al Japón. Fué a Francia, donde se le recibió con cariño, sosteniendo polémicas con los matemáticos más famosos de París. Ultimamente ha visitado España, donde fué agasajado como ustedes saben. Pero en fin, después de eso, es inútil seguir hablando de lo que ha hecho: después de eso, es Einstein, y basta su nombre.

Recorre el mundo triunfalmente; los públicos profanos lo reciben con cariño y admiración; los personajes más encumbrados lo atienden deferentemente, y las universidades más famosas le confieren el título de Doctor Honoris Causa.

Sería injusto terminar esta reseña histórica sin antes hablar de un continuador de Einstein: me refiero a Weyl. Weyl, matemático alemán, tomó la teoría de la relatividad tal cual la había dejado su creador, y encontró que, para analizar los fenómenos eléctricos, era necesario aplicar fórmulas especiales, es decir, que la electricidad, que es un fenómeno universal, en lugar de estar comprendida dentro de las fórmulas, como la gravitación, estaba aislada y había que aplicarle, como digo, ecuaciones especiales. Weyl, repugnado por esa distinción, trató de hacer entrar en las fórmulas de la gravitación universal, la electricidad.

Los trabajos de Weyl, poco conocidos aún y muy discutidos, acusan, sin embargo, un nuevo esfuerzo de la inteligencia humana en pro de la verdad; así que sería injusto, como decía, no nombrarlo.

En cuanto a la opinión formada por los sabios sobre Weyl, es muy contradictoria: mientras unos le niegan derechos, otros lo ensalzan hasta el punto de suponerlo superior a su maestro, Einstein. Es caro que esta última es una opinión exagerada.

Con ésto doy por terminado este resumen histórico acerca de la teoría de la relatividad, sobre cuyo objeto debo decir aún dos palabras. En primer lugar, creo que en un pequeño curso como éste, era un prólogo inevitable hablar de la

manera como se ha formado la teoría; pero hay una causa superior a esa para que haya sido un poco más extenso de lo que deseaba, que es la siguiente.

Según se ha podido colegir de esta disertación, la teoría de la relatividad ha tenido un principio esencialmente físico. Físicos han sido los sabios que en su formación han intervenido, físicos los esperimentos que la han producido. Sin embargo, esa teoría se aplica después a todas las ciencias exactas. Para evitar una serie de conocimientos previos y para estar más de acuerdo con la índole de los estudios que se cursan aquí, vamos a presentarla, no tal cual se engendró, sino es una forma matemática: nos basaremos solamente en la matemática y en la mecánica para deducir la teoría. Era necesario que supieran, los que van a asistir a estas lecciones, que la doctrina no se formó históricamente así, sino que una vez engendrada por el camino indirecto de la física, se ha podido explicar en una forma matemática y mecánica, dejando a un lado su origen, para hacerla más fácil.

LECCIÓN II

SUMARIO: **El principio de la Relatividad de la mecánica newtoniana. — Experimento de Michelson y Morley. — Contracción de Fitzgerald - Lorentz. — El importante papel de la luz en la nueva teoría.**

La mecánica newtoniana está basada sobre tres principios fundamentales. El primero es el de la inercia, que dice que todo cuerpo no sujeto a influencias exteriores, conserva su estado de reposo o su estado de movimiento rectilíneo y uniforme. El segundo es el de la fuerza, que afirma que toda fuerza aplicada a un cuerpo, es proporcional a la aceleración multiplicada por una constante, que resulta ser la masa del cuerpo. El tercero es el de la reacción, que se expresa diciendo que si un cuerpo ejerce sobre otro una presión determinada, el segundo devuelve al primero una reacción idéntica.

Pero no todos los espacios son apropiados para que éstos tres principios fundamentales se cumplan. En efecto, si tomamos un sistema de ejes coordenados, rígidamente ligado a la Tierra, veremos que un cuerpo que cae a ella no lo hace con movimiento rectilíneo y uniforme, como dice el primer principio, sino con movimiento uniformemente acelerado. Vemos también que un péndulo—en la célebre experiencia de Foucault, — hace sus oscilaciones de tal modo, que el plano de ellas gira lentamente, lo cual, si no es directamente contrario a los principios enunciados, lo es a las consecuencias de ellos. Esto sucede porque en la Tierra se presentan ciertas influencias extrañas que hacen que los tres principios no puedan ser cumplidos rigurosamente: por un lado la gravitación, y por otro la rotación de la tierra. Por eso decíamos que habían espacios propios e impropios para el cumplimiento de los principios fundamentales de la mecánica.

Si nosotros, queriéndonos sustraer a esa dificultad, lleváramos nuestro sistema de ejes coordenados al Sol, nos encontraríamos con los mismos inconvenientes, debido a la gravitación del Sol, por un lado, y por otro a la trayectoria curvilínea que describe dicho astro en el espacio. ¿Dónde está, pues, el sistema de ejes coordenados propios, que se presta para que en él se cumplan rigurosamente los tres principios fundamentales de la mecánica? Habría que tomar un punto del espacio, infinitamente alejado de las masas gravitantes y después probar si en ese punto se cumplen los tres principios enunciados, rigurosamente. No habría otro medio. Una vez encontrado ese sistema de ejes coordenados, podemos decir que él está en reposo absoluto.

Si ahora nosotros tomáramos otro sistema de ejes que se mueva con respecto al primero con un movimiento rectilíneo y uniforme, veríamos que un movimiento uniforme y rectilíneo de una partícula en el primer sistema se traduce en un movimiento de la misma naturaleza en el segundo; lo único que varía es la velocidad.

Si consideramos un movimiento acelerado en el primer sistema, que hemos llamado en reposo, ese movimiento resultará también acelerado en el segundo, y la aceleración será igual a la que tenía en el primero. Eso se ve por otro lado fácilmente en la fórmula: $F=ma$, en la cual, al hacer el cambio de ejes coordenados, quedando constante la fuerza y constante la masa, debe resultar invariable la aceleración. De la misma manera se cumple en el segundo sistema el principio de la reacción, si se cumple en el primero.

Por lo tanto podemos decir que este segundo sistema sirve igualmente para aplicar rigurosamente los principios fundamentales de la mecánica.

Entre los dos sistemas no hay diferencia alguna. Un observador colocado en el segundo, al constatar que los principios de la mecánica son cumplidos de una manera rigurosa, creerá que está en reposo, como lo cree el que está colocado en el primer sistema mencionado. De ahí se deduce el principio de la relatividad de la mecánica newtoniana, que dice que si un sistema de ejes es propio para el cumplimien-

te de las leyes fundamentales, otro que está en movimiento rectilíneo y uniforme con respecto al primero, es igualmente propio. De otra manera, todos los sistemas de ejes en movimiento rectilíneo y uniforme, unos con respecto a los otros, son igualmente válidos para la expresión de las leyes de la mecánica. Un tercer enunciado del mismo principio: no se puede, por la observación de fenómenos mecánicos, dilucidar si un sistema de ejes coordenados está en reposo o en movimiento rectilíneo y uniforme.

Ahora cabe preguntarse: ¿cuáles son las fórmulas de transformación de un sistema de ejes coordenados al otro? Estas fórmulas, muy elementales y que ustedes conocen, tienen gran interés para nosotros, para compararlas luego con aquellas de la misma naturaleza que resultan de la teoría de Einstein. Vamos a ubicar los sistemas en la posición más simple posible. Sea O X Y Z el primer sistema de ejes coordenados, que hemos llamado en reposo, y en el cual se cumplen rigurosamente los principios de la mecánica. El otro sistema O' X' Y' Z' vamos a colocarlo con sus ejes paralelos a los primeros y supongamos que el eje X' coincida con el X. Supongamos también que en un principio los dos orígenes coincidían también, pero que después se han separado, debido al movimiento rectilíneo y uniforme, de velocidad v que tiene el sistema *O'* con respecto al sistema *O*. En estas

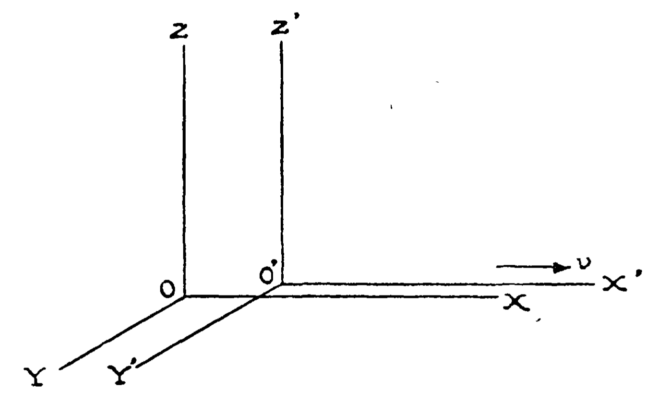


Fig. 1

condiciones, el grupo de fórmulas de transformación, será el siguiente:

$$x' = x - vt$$
$$y' = y$$
$$z' = z.$$

Debemos, además, agregarle a éste grupo una cuarta fórmula, que es siempre admitida implícitamente:

$$t' = t.$$

En efecto, habiendo tomado un origen común para el tiempo, el transcurrido desde ese origen — cuando los dos puntos *O'* y *O* coincidían, — es igual para un sistema que para el otro. Eso no se discute en la mecánica clásica. Sin embargo, tenemos interés en hacer aparecer esa cuarta fórmula, porque ella después no se cumple en la teoría einsteniana.

Terminado lo referente a este principio, vamos a entrar a la descripción del experimento de Michelson y Morley, el cual fué hecho para tratar de apreciar el movimiento de la Tierra con respecto al éter, supuesto inmóvil. Como se relaciona estrechamente con otras dos experiencias que también versaban sobre la inmovilidad del éter, vamos a describir suscintamente esos dos experimentos anteriores. Ellos son: el que puso de manifiesto la aberración, descubierta por Bradley en el año 1826, y la experiencia de Fizeau.

La aberración consiste en lo siguiente. Si por un telescopio, se dirige una visual a una estrella *E*, el rayo luminoso viene según el eje del aparato, pero una vez dentro de él, en el tiempo que emplea en hacer el recorrido *A B*, el telescopio, debido al movimiento de la Tierra, se ha trasladado supongamos que en la dirección de la flecha, y entonces el rayo seguirá un camino oblicuo y vendrá a parar a un punto *C* que no es el cruce de los hilos del retículo, sino que estará desviado de él: esta desviación es lo que se llama aberración. El fenómeno descrito prueba que el éter está inmóvil

con respecto a la Tierra, porque si fuera arrastrado por ella, trasmitiéndose dentro de él el rayo luminoso, no tendría por qué desviarse debido al movimiento de nuestro planeta.

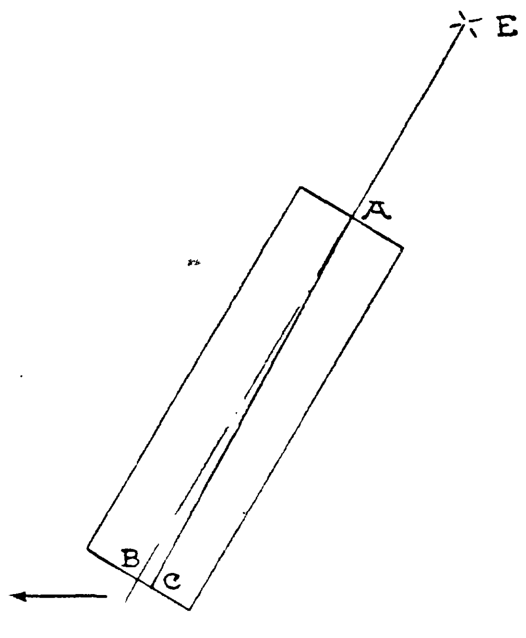


Fig. 2

El segundo experimento, basado sobre los trabajos de Fresnel, de los cuales ya hemos hablado, es el de Fizeau. Fizeau midió la velocidad de la luz en los medios en movimiento. Para eso tenía un aparato constituído por un tubo en forma de U, dentro del cual circulaba agua, supongamos que en la dirección de la flecha. El foco luminoso *F* emitía dos rayos que, al reflejarse en el espejo *E* débilmente azogado — es decir, que permitía el paso de parte de la luz al través de él, reflejando la otra, — seguían las direcciones que muestra la figura; estos rayos eran hechos paralelos por medio de una lente y entraban al tubo, de donde salían por el otro extremo. Aquí había otra lente que hacía los rayos convergentes,

y en el punto de convergencia un espejo *E'* que los volvía a reflejar. El rayo *A B C D*, al reflejarse en el espejo, seguía el camino del otro en sentido inverso: seguía el camino *D G H I*, y el rayo *I H G D*, reflejándose en el espejo *E'*, también seguía el camino del otro, en sentido contra-

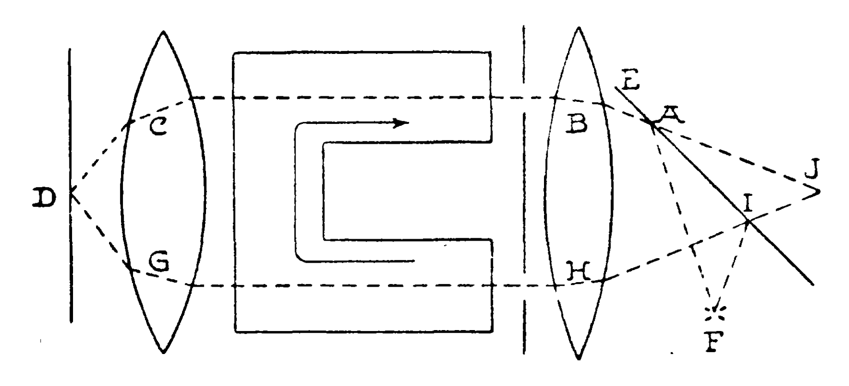


Fig. 3

rio. Luego ambos rayos, pasando a través del espejo *E*, se reunían en un punto *J*, donde se observaban las franjas de interferencia. La interferencia es un fenómeno por el cual la superposición de los rayos de luz produce la obscuridad. Hemos dicho que, según la teoría ondulatoria, la luz se puede comparar a las ondas que produce en el agua tranquila la caída de una piedra. Son ondas que se producen en el éter, vibraciones del éter. Ahora, si arrojamos sucesivamente dos piedras en un agua tranquila, puede suceder que al encontrarse dos ondas, las moléculas de agua, en ese punto, se conserven al nivel normal, porque por un lado tienden a bajar, y por otro a subir, requeridas por las dos ondas. Ese fenómeno, aplicado a la luz, da una interferencia, es decir, la oscuridad. Entonces, observando en el punto *J*, las franjas de interferencia, se podría estudiar la variación del tiempo empleado por los rayos en su trayecto. Primero se hacía la experiencia con el agua del tubo en reposo; se fijaba la posición de las franjas de interferencia; luego se ponía el agua en movimiento. Se anotaba el cambio de posición de las franjas,

que venía a producir el retardo que sufría un rayo sobre el otro, debido al movimiento del agua. Ahora, invirtiendo la dirección de la corriente, esa desviación se duplicaba. Ustedes observarán que un rayo camina siempre en la dirección del movimiento del agua, y el otro en sentido inverso.

En esa forma Fizeau llegó a verificar la fórmula dada por Fresnel con su famoso coeficiente de arrastre. Fresnel decía que la luz que viajaba en un medio en movimiento — que es el agua en este caso,—no venía a tener, dentro de dicho medio, una velocidad igual a la suma de las velocidades de la luz en el agua en reposo y la del agua, sino que era igual a la primera más una fracción de la segunda, lo cual parecía indicar que el agua no arrastraba totalmente al éter, dentro del cual viaja el rayo de luz, sino que lo arrastraba parcialmente. El arrastre determinaba el coeficiente llamado por Fresnel *coeficiente de arrastre.* La fórmula hallada por este sabio fué:

$$w = c' + k\ v = c' + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) v,$$

en la cual w es la velocidad de la luz en el agua en movimiento, c' la que tiene en el mismo medio en reposo; v la del agua y k el coeficiente de arrastre que es función de n, índice de refracción de la luz en el agua, es decir, cociente de las velocidades de la luz en el vacío y en el agua. Para este líquido en movimiento con una velocidad de 8 m. por segundo, el valor de k es aproximadamente 0.5.

Estas son las dos experiencias precursoras de la de Michelson y Morley.

Para comprender bien éste último experimento vamos primero a dar un ejemplo gráfico. Supongamos un río en el cual la dirección de la corriente es la de la flecha, y en él un nadador, cuya velocidad de nado con respecto al agua sea constante. Vamos a hacer que ese nadador ejecute dos recorridos: primero, uno de longitud $2l$, *A B A*, ida en sentido contrario a la corriente, y vuelta en el mismo sentido de ella

hasta llegar al punto de partida. Después otro recorrido *C D C*, normal al anterior y de longitud igual $2l$, arrancando

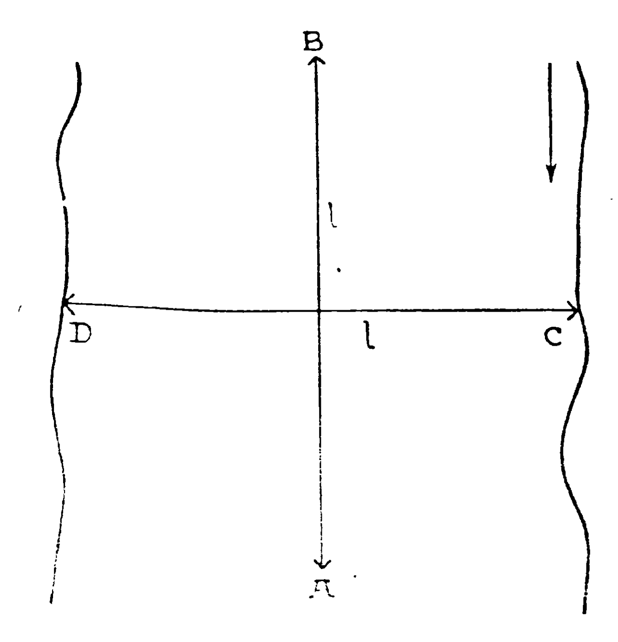


Fig. 4

de una orilla, llegando al punto opuesto de la otra y volviendo al punto de salida. Vamos a preguntarnos: el nadador, ¿en cuál de los dos recorridos empleará más tiempo?

Para eso, en lugar de trabajar con ejemplos numéricos, iremos a la fórmula general. Supongamos que la velocidad de la corriente sea v, que la velocidad del nadador sea c, y estudiemos el tiempo empleado en el primer recorrido: partida de *A*, llegada a *B*, y vuelta a *A*. En la ida contra la corriente, la velocidad del nadador será igual a la velocidad primitiva menos la de la corriente de agua: $c - v$. El tiempo empleado en el camino de ida será $\frac{l}{c - v}$.
En la vuelta, el nadador anda a favor de la corriente, y en-

tonces la velocidad es $c + v$, y el tiempo empleado será igual a $\frac{l}{c+v}\cdot$ El tiempo del recorrido total será pues:

$$t_1 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2\,c^2}{c^2 - v^2}\,.$$

De la misma manera vamos a estudiar el tiempo empleado en el segundo recorrido. El obligará al nadador a describir la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Este triángulo tiene un cateto proporcional a v, velocidad de la corriente, y la hipotenusa proporcional a c, velocidad del nadador, es decir, que éste, para llegar al punto opuesto del río, venciendo la corriente, que trata de llevarlo lateralmente, tendrá que dirigirse a un punto colocado más arriba, de tal manera que la velocidad de la corriente le haga descender a medida que cruza el río, llegando al final al punto que él desea. Así que la velocidad resultante del nadador será el otro cateto del triángulo, es decir: $\sqrt{c^2 - v^2}$. Ahora, no tenemos más que dividir el recorrido por la velocidad, para obtener el tiempo, siendo esta velocidad la misma a la ida que a la vuelta, porque el fenómeno se repite. De modo que el segundo tiempo será:

$$t_2 = \frac{2\,l}{\sqrt{c^2 - v^2}}\cdot$$

Esos son los dos tiempos empleados; para obtener su relación, dividiendo uno por otro, tendremos:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}},$$

es decir, que el tiempo del recorrido longitudinal es mayor que el del transversal en la proporción de 1 a $\sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}\cdot$ La

única limitación que tiene esta última expresión es que la velocidad de la corriente debe ser menor que la del nadador, para que ella resulte una cantidad real.

Sobre esto está basado el experimento de Michelson y Morley.

En esta experiencia, dado un foco luminoso *F*, éste emite un rayo que llega a un espejo *E* inclinado a 45°. Ese espejo está débilmente azogado, y por lo tanto, parte del rayo es reflejado y parte pasa a través de él. La primera llega al

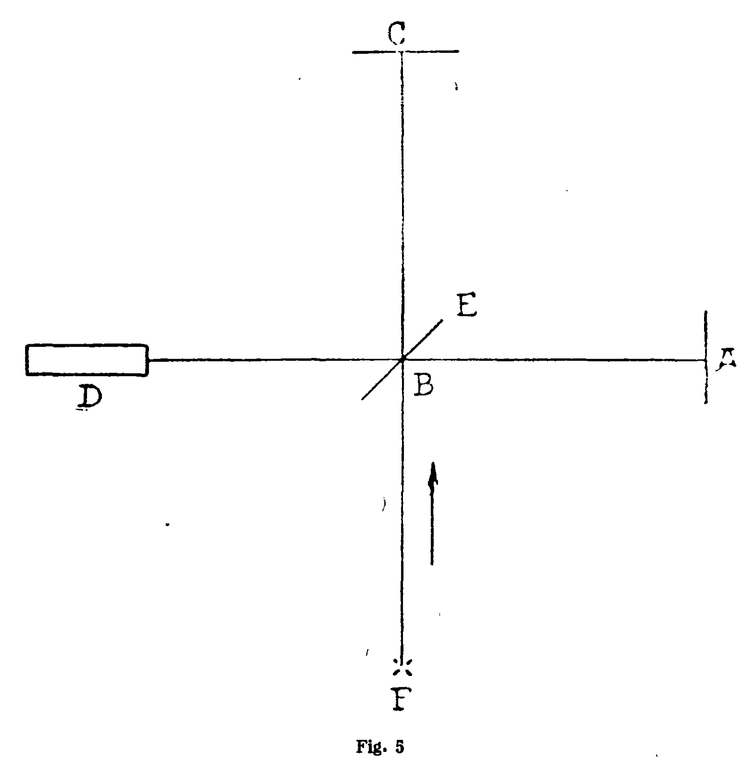


Fig. 5

punto *A*. donde se refleja nuevamente en un espejo normal y vuelve al punto *B*. La otra parte del rayo se refleja sobre otro espejo en el punto *C* y vuelve también a *B*. Aquí, al reunirse los dos rayos, son observados por un telescopio colocado en el punto *D*. Ahora, si colocamos este aparato de tal ma-

nera que uno de los brazos sea paralelo al movimiento de la Tierra, cuya dirección suponemos sea la de la flecha, tendremos que los recorridos de estos rayos, *B A B, B C B*, son de la misma naturaleza que los del nadador del ejempdo precedente.

Repitiendo la hermosa parábola de Eddington, el nadador era en este caso un rayo de luz, que como sabemos, nada en el éter a razón de trescientos mil kilómetros por segundo; el éter corría entre los muros del laboratorio, como un río entre sus orillas. Un recorrido obligará a emplear más tiempo . ' rayo de luz que el otro para hacer su camino de ida y vuelta, de acuerdo con las fórmulas estudiadas.

El retardo de un rayo sobre el otro, se apreciaba por las franjas de interferencia de que ya hemos hablado, examinadas por medio del telescopio. Haciendo ahora girar 90° todo el aparato, el recorrido paralelo a la dirección del movimiento de la Tierra, se hacía normal a ella y viceversa; en consecuencia los tiempos empleados por los rayos de luz debían invertirse, y el rayo que llegaba después, debía hacerlo antes. Esto se observaría siempre por el cambio en el lugar de las franjas de interferencia. El aparato construído primitivamente en el año 87, vuelto a construir con todo lujo de detalles en 1904, estaba hecho esta última vez de tal manera que una velocidad igual a la décima parte de la de traslación de la Tierra, hubiera sido acusada. Sin embargo, con gran asombro de todos los sabios, el aparato no dió el resultado que se esperaba de él. El cambio de lugar de las franjas de interferencia no se obtuvo, con lo cual se vino a demostrar de una manera rigurosa que el tiempo empleado por la luz o lo que es lo mismo, la velocidad de ella en el sentido del movimiento de la Tierra o en sentido transversal era exactamente la misma. Ahora, a primera vista, eso lo que parece implicar es que el éter era totalmente arrastrado por la Tierra, en su movimiento, de tal manera que acompañando el éter a ésta, no tenía por qué haber variaciones en la velocidad de la luz, que viajaba en un medio inmóvil con respecto al planeta. Pero el fenómeno de la aberración era tan

concluyente en cuanto a la inmovilidad del éter, que se siguio creyendo que él estaba inmóvil, y hubo que buscar la causa del resultado negativo de este experimento por otro lado.

Como se comprenderá, la experiencia de Michelson y Morley no es en realidad tan simple como la hemos descrito. En primer lugar los brazos del aparato no son rigurosamente iguales, lo que no es un inconveniente, pues se opera sobre el retardo de un rayo sobre otro, retardo que debía variar al girar el aparato. Además, en éste no existían solamente tres espejos como en nuestro esquema, sino diez y siete, cuatro en cada extremo de los brazos y el último al centro, de tal modo que cada rayo hacía el camino de ida y vuelta varias veces, alargándose así su recorrido. El aparato, construído de acero, era de gran peso y rigidez, y giraba dentro de una enorme cubeta llena de mercurio para evitar toda trepidación.

A raíz del experimento de Michelson y Morley, se hicieron otros, de índole muy variada, unos ópticos, otros eléctricos, ejecutados éstos últimos por Trouton y Noble, para ver si se podía, por medio de la constatación de variaciones en ciertos fenómenos, poner en claro el movimiento de la Tierra con respecto al éter. Todos éstos experimentos fueron negativos. No se pudo de ninguna manera vislumbrar dicho movimiento. Entonces, como dije en la lección anterior, Fitzgerald, sabio irlandés, por un lado, y Lorentz, holandés, por otro, emitieron casi simultáneamente la desconcertante hipótesis de la contracción. Ellos decían: si la luz, para recorrer dos distancias iguales, en las cuales debiera tener distintas velocidades, tarda el mismo tiempo, es porque esos recorridos, que deberían ser iguales, no lo son. Es decir, que esos recorridos, que han sido construídos iguales, por el hecho de estar colocados, uno en la dirección del movimiento de la Tierra y otro en dirección normal, sufren una diferencia. El que está en sentido transversal, no sufre variación perceptible; el que está en el sentido del movimiento de la Tierra, se contrae, y ese acortamiento es proporcional a la fracción, que expresa la relación de los tiempos que deberán emplear-

se. Por lo tanto, si un cuerpo tiene una longitud igual a l, colocado en la dirección del movimiento de la tierra, cuya velocidad supongamos sea v, su longitud se reducirá a:

$$l\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

siendo c la velocidad de la luz en el vacío. La misma reducción sufrirá todo cuerpo animado de una velocidad v, en el sentido de dicha velocidad.

Esta es la fórmula de la contracción de Fitgerald - Lorentz. La hipótesis, como decíamos, es realmente desconcertante. No se puede admitir que un cuerpo, constituído de una sustancia rígida, puede contraerse, por más que esté dotado de velocidad. Sin embargo, Lorentz, para explicar este fenómeno, basado en su teoría de los electrones, dice lo siguiente: si la sustancia de que están compuestos los cuerpos está formada por átomos, los cuales a su vez estén constituídos por electrones, los que se mantienen en su posición debido a fuerzas eléctricas, tal cual un sistema planetario en miniatura, es lógico que, transmitiéndose la electricidad dentro del éter, una corriente de éter, un viento de éter, como se llama, podría hacer de manera que esas fuerzas eléctricas variaran, y con ellas las distancias entre los electrones, trayendo esto aparejado la modificación de las dimensiones del cuerpo. Es una explicación bastante plausible, que una vez dada empieza a hacer de modo que se mire con menos desconfianza la famosa hipótesis de la contracción. Por otra parte, el hecho de que todos los cuerpos se contrajeran en el mismo grado, cualquiera fuera su sustancia, era explicado por la razón de que los electrones de los distintos cuerpos, siendo todos de la misma materia y debiéndose la diferencia de su sustancia nada más que al número y a la disposición de ellos, debían sufrir modificaciones idénticas.

Recapitulando los tres experimentos, vemos que la aberración probaba la inmovilidad del éter; el experimento de Fizeau, su arrastre parcial y el de Michelson y Morley ten-

personal en la apreciación de los fenómenos, trata de tener un medio físico y tangible para observar dichos fenómenos, y, al elegir ese medio, se le ocurrió que no podía haber ninguno mejor que la luz, por la razón de que su velocidad era la máxima entre todas las conocidas. Este hecho de que la velocidad de la luz es la mayor, está primeramente dado por la fórmula de la contracción. En efecto, todo cuerpo, reduciéndose a su longitud multiplicada por un factor, una vez que está animado de un cierto movimiento en la dirección de dicha longitud, es natural que no podrá reducirse a menos de cero. Ahora, en ese factor, en el factor de contracción de Lorentz, vemos que cuando v, la velocidad del móvil, se hace igual a c. velocidad de la luz, aquel se transforma en un plano. Las dimensiones longitudinales del cuerpo se anulan, permaneciendo constantes las transversales. Eso prueba que no puede haber velocidad superior a la de la luz.

Los experimentos comprueban esta afirmación audaz. En

día a probar su arrastre completo, para evitar lo cual se creó la hipótesis de la contracción. Veremos después que la teoría de la relatividad armoniza perfectamente los tres experimentos.

Tengo que hacer notar de una manera muy particular, un hecho que pasa generalmente inadvertido y que se presta después a grandes confusiones. Es el siguiente: la velocidad que se prueba que es igual en el experimento de Michelson y Morley, no es la velocidad real de la luz: es la velocidad media de ida y de vuelta en un recorrido doble. En dicha experiencia podría, estando el rayo de luz según la dirección del movimiento de la Tierra, ser mayor la velocidad en un sentido que en otro, a la ida que a la vuelta, con tal de que la velocidad media quedara incambiada. Porque resulta que la teoría de la relatividad está basada sobre el hecho de que la velocidad real de la luz es la misma en cualquier sistema de

efecto, las cosas corrientes que nosotros conocemos tienen velocidades infinitamente menores que la de los rayos luminosos. Para llegar a velocidades parecidas, tenemos que recurrir a altas experiencias de física. Los cuerpos que se mueven más rápidamente son los electrones libres de que están constituídos los rayos β del radio, y los rayos catódicos que se producen en tubos de aire rarificado, por medio de descargas eléctricas a gran voltaje. Esos electrones puestos en libertad, tanto los del radio, como los de los tubos catódicos, se mueven con velocidades enormemente grandes; pero se ha pidido conprobar que esas velocidades tienden pero no llegan nunca a la de la luz. Se ha podido observar, por medio de aparatos sumamente perfeccionados y sensibles, que esas partículas adquieren velocidades hasta de doscientos noventa y siete mil kilómetros por segundo, siendo la de la luz de trescientos mil. Así que vemos que los experimentos confirman la hipótesis dada por la fórmula.

Como decía, de acuerdo con esa propiedad fundamental de poseer la velocidad más grande conocida, Einstein eligió la luz, o las ondas hertzianas o la electricidad, — los cuales son fenómenos iguales en el fondo, — para determinar y estudiar los fenómenos que se presentaban.

Para ser un poco más explícitos, vamos a exponer el caso de la simultaneidad en dos lugares distintos. Si tenemos dos puntos separados uno del otro, y queremos definir la producción de dos acontecimientos simultáneos en dichos puntos, de acuerdo con la mecánica clásica, diremos, que ellos son simultáneos si se producen exactamente en el mismo instante. Pero existe la duda de que el tiempo, en un punto y en el otro, estando éstos separados, corra de la misma manera, es decir, que dos relojes colocados en esos puntos, marchen de una manera sincrónica. Así es que, para descartar lo que pueda tener de dudosa esta afirmación, hay que sustituirla por la siguiente: si nos colocamos en el punto medio de la distancia entre esos dos puntos; si en el instante en que se producen los dos acontecimientos se emiten dos rayos luminosos de ellos, rayos que llegan a nuestra retina en el mismo instante, los dos acontecimientos serán simultáneos. Ve-

sobre el cual está basada, casi puede decirse, la teoría de la relatividad restringida, es que la velocidad de la luz, en todos los sistemas de ejes coordenados, en movimiento rectilíneo y uniforme unos con respecto a los otros, es exactamente la misma. Este resultado, si ustedes piensan en él, es realmente sorprendente. Es completamente contrario a todos los hechos que conocemos, porque nosotros antes, si teníamos la velocidad de un móvil cualquiera en un sistema de ejes coordenados y queríamos calcular su velocidad en otro sistema que tenía un movimiento con respecto al primero, formulábamos una ley de composición de velocidades. Ahora, en cambio, tratándose de la luz, no hay composición de velocidades; hay ese hecho raro e inexplicable que va a traer, como veremos, el derrumbe de las fórmulas de la cinemática: que la velocidad de la luz es la misma en cualquier sistema de ejes coordenados.

La luz ha sido empleada por Einstein como un medio poderoso para el estudio de su teoría. El papel que desempeña la luz en la nueva doctrina es absorvente. Einstein, tratando de evitar las confusiones y peligros del factor personal en la apreciación de los fenómenos, trata de tener un medio físico y tangible para observar dichos fenómenos, y, al elegir ese medio, se le ocurrió que no podía haber ninguno mejor que la luz, por la razón de que su velocidad era la máxima entre todas las conocidas. Este hecho de que la velocidad de la luz es la mayor, está primeramente dado por la fórmula de la contracción. En efecto, todo cuerpo, reduciéndose a su longitud multiplicada por un factor, una vez que está animado de un cierto movimiento en la dirección de dicha longitud, es natural que no podrá reducirse a menos de cero. Ahora, en ese factor, en el factor de contracción de Lorentz, vemos que cuando v, la velocidad del móvil, se hace igual a c. velocidad de la luz, aquel se transforma en un plano. Las dimensiones longitudinales del cuerpo se anulan, permaneciendo constantes las transversales. Eso prueba que no puede haber velocidad superior a la de la luz.

Los experimentos comprueban esta afirmación audaz. En

efecto, las cosas corrientes que nosotros conocemos tienen velocidades infinitamente menores que la de los rayos luminosos. Para llegar a velocidades parecidas, tenemos que recurrir a altas experiencias de física. Los cuerpos que se mueven más rápidamente son los electrones libres de que están constituídos los rayos β del radio, y los rayos catódicos que se producen en tubos de aire rarificado, por medio de descargas eléctricas a gran voltaje. Esos electrones puestos en libertad, tanto los del radio, como los de los tubos catódicos. se mueven con velocidades enormemente grandes; pero se ha pidido conprobar que esas velocidades tienden pero no llegan nunca a la de la luz. Se ha podido observar, por medio de aparatos sumamente perfeccionados y sensibles, que esas partículas adquieren velocidades hasta de doscientos noventa y siete mil kilómetros por segundo, siendo la de la luz de trescientos mil. Así que vemos que los experimentos confirman la hipótesis dada por la fórmula.

Como decía, de acuerdo con esa propiedad fundamental de poseer la velocidad más grande conocida, Einstein eligió la luz, o las ondas hertzianas o la electricidad, — los cuales son fenómenos iguales en el fondo, — para determinar y estudiar los fenómenos que se presentaban.

Para ser un poco más explícitos, vamos a exponer el caso de la simultaneidad en dos lugares distintos. Si tenemos dos puntos separados uno del otro, y queremos definir la producción de dos acontecimientos simultáneos en dichos puntos, de acuerdo con la mecánica clásica, diremos, que ellos son simultáneos si se producen exactamente en el mismo instante. Pero existe la duda de que el tiempo, en un punto y en el otro, estando éstos separados, corra de la misma manera, es decir, que dos relojes colocados en esos puntos, marchen de una manera sincrónica. Así es que, para descartar lo que pueda tener de dudosa esta afirmación, hay que sustituirla por la siguiente: si nos colocamos en el punto medio de la distancia entre esos dos puntos; si en el instante en que se producen los dos acontecimientos se emiten dos rayos luminosos de ellos, rayos que llegan a nuestra retina en el mismo instante, los dos acontecimientos serán simultáneos. Ve-

nos ahí el importante papel desempeñado por la luz, como un medio de estudio de los fenómenos. Eso se repite al través de toda la teoría.

Empleándose la luz con ese fin primordial, es justo que en las fórmulas que vamos a establecer más adelante, se to-

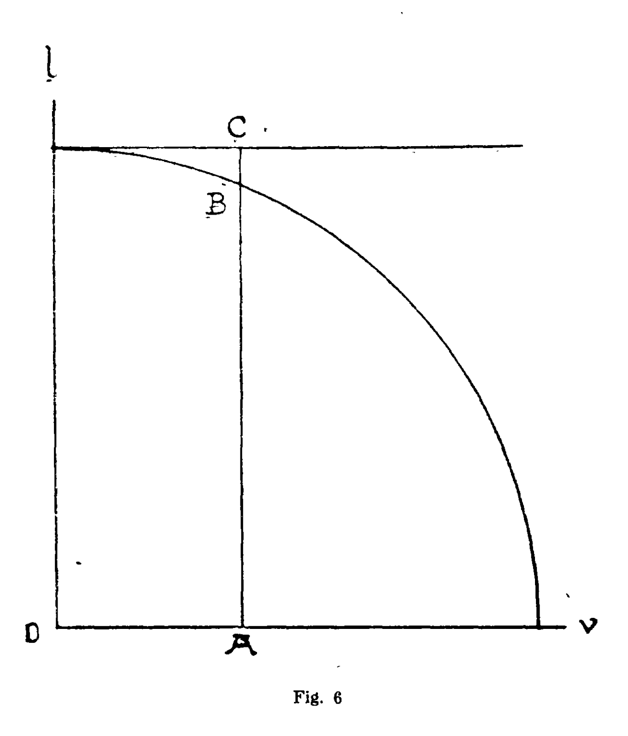


Fig. 6

me su velocidad como la unidad. En estas condiciones, toda velocidad conocida variará entre cero y uno, y el factor de contracción se reducirá a $\sqrt{1-v^2}$. La adopción de esta unidad trae como consecuencias el tener que sustituir el tiempo en las fórmulas, poniendo en lugar de cada segundo, 300.000 kilómetros, y cambiar toda velocidad que aparezca, por el cociente de dividirla por la de la luz.

Ya que hemos fijado nuestras unidades, para terminar, vamos a trazar un pequeño diagrama de la contracción de Lorentz. Si tomamos una longitud igual a la unidad — su-

pongamos que el vertical es el eje de las longitudes, — tendremos que esta magnitud de una unidad cuando el cuerpo está en reposo, disminuye si él se pone en movimiento en la dirección de esa longitud, de acuerdo con el factor de contracción. Esa disminución se produce según una curva, y esa curva es una circunferencia, o mejor, un cuarto de circunferencia, por el hecho de que tanto las velocidades como las longitudes tienen que ser positivas, así que es solamente en uno de los cuadrantes que la ecuación es válida. Trazamos, pues, el cuarto de circunferencia, y *A B* será la longitud de un metro a la velocidad *O A*. Es importante observar que para velocidades pequeñas como las corrientes en la vida diaria, la disminución, que está dada por *B C*, es pequeña también, y por eso no se observa. La contracción es grande a partir de ciertos límites y después crece de una manera rápida. Para que la longitud de un cuerpo llegue a reducirse a la mitad, se necesita una velocidad de 266.000 kilómetros por segundo, que es, como se ve muy próxima ya a la de la luz.

LECCIÓN III

SUMARIO: Simultaneidad. — Longitud. — Principio de la relatividad restringida. — Deducción del grupo de fórmulas de Lorentz. — Experimentos probatorios del principio.

Vimos, en la última lección, cual era el concepto de la simultaneidad de dos acontecimientos en dos puntos distintos. Pudimos apreciar que no presentaba ninguna dificultad cuando se trataba de un observador que estuviera en reposo con respecto a los dos puntos. Vamos a ver ahora como ese concepto se complica, como se vuelve vago, cuando el observador está en movimiento con respecto a los puntos en los cuales se desarrollan los acontecimientos.

Supongamos dos puntos A y B, y un observador que, de acuerdo con el método ya usado, se colocará en el punto medio M de la distancia. Admitamos que en A y B tienen lugar dos acontecimientos simultáneos, y que en el instante en que ellos se producen salgan de dichos puntos dos rayos luminosos.

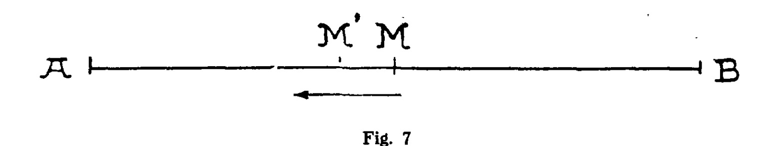


Fig. 7

Pero supongamos que el observador, en lugar de estar en reposo como en el ejemplo descrito, está animado de cierto movimiento sobre la recta, en el sentido de la flecha, por ejemplo. En el tiempo que demoran los rayos en llegar desde los puntos A y B al ojo del observador, éste se habrá trasladado un cierto espacio hacia la izquierda, viniendo a ocupar el punto M'. Entonces sucederá que uno de los rayos

de luz, teniendo que recorrer una distancia menor que el otro, llegará antes. En consecuencia, los dos acontecimientos, que resultaban simultáneos para el observador en reposo, no lo serán ya para el que está en movimiento.

De este ejemplo, completamente elemental, se deduce también la variación de la longitud de un cuerpo, según él está en reposo o en movimiento con respecto al observador. En efecto, ¿cuál es la definición de distancia entre dos puntos de un cuerpo en movimiento con respecto a nosotros? Para medir esa distancia deberemos fijar dos puntos del espacio que coincidan simultáneamente con los dos del cuerpo, y medir la distancia entre esos dos puntos inmóviles del espacio, cuando el cuerpo haya pasado. Pero, por el hecho de entrar en este concepto la simultaneidad, y por el recientemente demostrado, de que ésta varía debido al movimiento del observador con respecto a los dos puntos, resulta que la longitud de que hemos hablado tiene que ser variable también y depender de nuestro movimiento con respecto al cuerpo o al del cuerpo con respecto a nosotros. Así simplemente, con esta explicación, se concibe ya que una distancia medida en un cuerpo en movimiento no puede ser igual a la medida en uno que esté en reposo, y que esa distancia variará también según la mayor o menor velocidad de que está poseído el cuerpo.

Para hacer esto más claro, vamos a dar otro ejemplo, también muy elemental. Se trata del caso de un tren. Imaginémonos un binario y sobre él un tren que tuviera exactamente la longitud de un kilómetro, *A B*. Supongamos primeramente ese tren en reposo, y que al costado de la vía, se hinquen en el terreno, dos estacas *C* y *D*, una frente al principio y otra frente a la extremidad de él: la distancia entre las estacas será también de un kilómetro. Ahora supongamos que el tren, en lugar de estar en reposo, esté en movimiento rápido en la dirección de la flecha, y veamos si un observador colocado dentro de él, apreciará que la distancia entre las estacas es también de un kilómetro o si habrá variado, y cómo habrá variado. Para eso el observador, según el método adop-

tado, se colocará en el punto medio *M* del convoy y fijará dos puntos de éste que estén simultaneamente frente a las dos estacas, midiendo luego esa distancia sobre el tren. El obser-

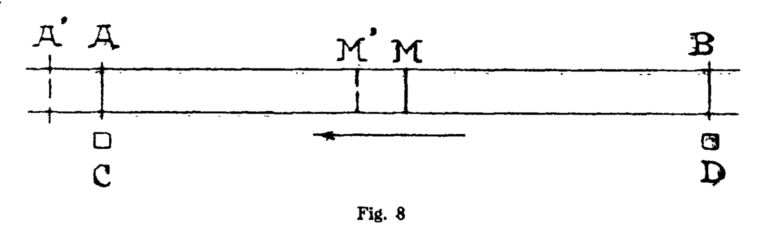


Fig. 8

vador verá, pues, un rayo de luz que parte de la estaca *D* cuando el extremo posterior del tren cruza frente a ella; este rayo luminoso, ¿llegará a su ojo al mismo tiempo que otro que salga de la estaca *C*, cuando el extremo anterior pasa frente a ella? No. Porque el observador, durante el tiempo que transcurre entre la salida de los rayos y la llegada a su retina, se habrá desplazado hacia la izquierda, viniendo a parar al punto *M'*; de tal manera que el rayo que sale de *D*, cuando la extremidad de tren pasa frente a esa estaca, llegará a su ojo después que el que sale de *C* cuando la parte anterior pasa frente a esta estaca. En consecuencia, el rayo que llegará al ojo del observador al mismo tiempo que el primero, será uno que sale de la estaca *C* después que el principio del tren ha pasado junto a ella, viniendo a ocupar la posición *A'*. Entonces, la medida que el observador hace, dentro del convoy, de la distancia entre las estacas, que era de un kilómetro, será desde el extremo posterior hasta el punto *A'* que ahora está dentro de él. El observador en movimiento juzgará, pues, que la distancia entre los dos puntos del terreno se ha acortado.

En este ejemplo está simplemente explicado el origen de la contracción. Se ve también en él cómo se mide, y el papel primordial que desempeña la luz en la teoría, siendo el vehículo de las medidas. Este caso, que no creo muy riguroso, es dado con el único objeto de familiarizar al novicio con la idea de la variación de las distancias de acuerdo con la velocidad.

Vamos a enunciar ahora el principio de la relatividad restringida, antes de lo cual me voy a permitir recordar en pocas palabras el resultado del experimento de Michelson y Morley, que es fundamental.

En el experimento citado se medía la duración del recorrido de un rayo de luz en dos trayectorias de igual longitud, una en la dirección del movimiento de la Tierra, y otra normal a la primera. Como la velocidad de la luz debía ser, por el movimiento de la Tierra con respecto al éter, distinta en esos dos recorridos, el tiempo empleado debía ser también diferente; pero resultó del experimento que era igual, y en consecuencia, hubo que hacer la hipótesis de que, para que esas dos trayectorias hechas con velocidades distintas, dieran tiempos iguales, las trayectorias no eran iguales, sino distintas, es decir, que el recorrido que debía ser hecho con menor velocidad, había sufrido una contracción tal que la luz, siguiéndolo, empleaba el mismo tiempo que en el otro, que no se había contraído. Así es que de allí se deduce la hipótesis de la contracción, o, si se quiere, la hipótesis equivalente de la igualdad de la velocidad de la luz en cualquier sistema de referencia, esté en reposo o en movimiento uniforme; porque decir que el recorrido más largo se había acortado de tal manera que el tiempo empleado resultaba igual, era lo mismo que suponer que ese acortamiento no se había producido, sino que la luz lo había hecho con una velocidad idéntica.

El principio de la relatividad restringida, que no es más que la ampliación del de la relatividad de la mecánica newtoniana que ya hemos enunciado, dice, que para la expresión de los fenómenos físicos y mecánicos, son igualmente válidos todos los sistemas de ejes coordenados, en movimiento rectilíneo y uniforme unos con respecto a otros. El principio de la mecánica clásica se refería, únicamente, a experiencias mecánicas; ahora se añaden las físicas, como es el caso de la propagación de la luz. Expresado de otra manera, se puede decir, que no se puede distinguir, por medio de experiencias mecánicas ni físicas, si un sistema está en reposo o en movimiento uniforme.

Vamos ahora a entrar al estudio del grupo de fórmulas de transformación de Lorentz. Este grupo, famoso, puesto que es la base de la teoría de la relatividad restringida, no es más que el grupo de fórmulas de transformación de un sistema de ejes coordenados a otro que esté en movimiento uniforme con respecto al primero, de la mecánica newtoniana, que ya hemos establecido, pero estudiado de nuevo sobre la base de la relatividad. Habíamos visto que esas fórmulas, dados dos sistemas de ejes $O\ X\ Y\ Z$ y $O'\ X'\ Y'\ Z'$, uno en reposo y otro en movimiento uniforme, coincidiendo los ejes X, estando la velocidad v del segundo en la dirección de esos mismos ejes, y tomando por origen común de los tiempos el instante en que O' coincidía con O, eran las siguientes:

$$x' = x - vt$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = t.$$

Vamos a obtener este mismo grupo sobre la base de la relatividad, y para eso no tendremos que hacer más que una sola hipótesis: la de la constancia de la velocidad de la luz en cualquier sistema de ejes coordenados, con tal de que él esté animado de movimiento rectilíneo y uniforme, deducción extraída directamente del experimento de Michelson y Morley.

Supongamos un rayo de luz que en el sistema O parte del origen según el eje X en el sentido positivo; la ecuación de ese rayo, será:

$$x = ct \qquad \text{o} \qquad x - ct = 0.$$

Como hemos tomado la velocidad c de la luz como unidad, tendremos simplemente:

$$x - t = 0.$$

Ese mismo rayo, considerado en el sistema O', tendrá la misma velocidad, y, en consecuencia, su ecuación será:

$$x' = t' = 0.$$

Ahora, si queremos reunir estas dos fórmulas en una sola, tendremos que escribir la siguiente ecuación:

$$x' - t' = \sigma(x - t). \qquad (1)$$

Es la condición de coexistencia de las dos ecuaciones; σ es una constante.

Si hubiéramos tomado el rayo luminoso dirigido en el sentido de las x negativas, tendríamos estas otras dos ecuaciones:

$$x + t = 0$$
$$x' + t' = 0,$$

que, reunidas en una sola, dan:

$$x' + t' = \lambda(x + t), \qquad (2)$$

siendo λ otra constante.

De las (1) y (2) despejamos x' y t':

$$x' = \frac{\sigma + \lambda}{2} x - \frac{\sigma - \lambda}{2} t$$

$$t' = \frac{\sigma + \lambda}{2} t - \frac{\sigma - \lambda}{2} x.$$

Para simplificar, vamos a hacer un cambio de constantes; tomemos:

$$\frac{\sigma + \lambda}{2} = \beta \qquad \frac{\sigma - \lambda}{2} = \alpha,$$

y sustituyendo obtendremos:

$$x' = \beta x - \alpha t \qquad (3)$$
$$t' = \beta t - \alpha x. \qquad (4)$$

Tratemos ahora de calcular una de las constantes en función de la otra. Estas dos cantidades pueden reunirse en una fórmula haciendo el siguiente razonamiento. Consideremos el punto *O'*; para este punto, x' es siempre igual a cero. Así que, haciendo esta hipótesis en la (3), tendremos:

$$x_0 = \frac{\alpha}{\beta} t.$$

Esta es la abscisa del punto *O'*, en el sistema *O*. Ahora, vemos que, como el sistema *O'* está animado de un movimiento rectilíneo y uniforme con respecto al otro, si su abscisa es igual a una constante multiplicada por el tiempo, esa constante es la velocidad del sistema, Así que:

$$\frac{\alpha}{\beta} = v, \qquad \text{o}$$

$$\alpha = \beta v,$$

lo que nos da una una constante en función de la otra. Sustituyendo este valor en (3) y (4), obtendremos:

$$x' = \beta (x - vt) \qquad (5)$$

$$t' = \beta (t - vx). \qquad (6)$$

Nos faltaría solamente despejar la constante β. Para ello vamos a medir la longitud de un metro, por ejemplo, colocado en el sistema *O'*, visto desde el *O*, y después medir un metro en el sistema *O* visto desde el *O'*, colocado dicho metro según el eje X y a partir del origen. La longitud de ese metro de un sistema, medido desde el otro, debe ser igual en los dos casos, por el principio de la relatividad restringida, porque de no serlo, podríamos distinguir cuál de los dos sistemas está en reposo y cuál en movimiento, lo cual es contrario a dicho principio.

Vamos a hallar, pues, esas dos medidas iguales. Tomaremos, según la frase textual de Einstein, una imagen foto-

gráfica instantánea de un metro en el sistema *O'*, desde el *O*. Para eso, haremos lo siguiente. Por lo pronto, elegiremos un instante determinado en nuestro sistema de referencia, para hacer esa medida, por ejemplo, el instante $t = 0$, lo cual empleando la (5), nos da:

$$x' = \beta x.$$

Ahora, debemos hacer $x' = 1$ primero, $x' = 0$, después, y restar los valores correspondientes de x; haciéndolo, obtenemos por diferencia:

$$\Delta x = \frac{1}{\beta}.$$

Este es el valor de la longitud de un metro colocado en el sistema *O'*, visto desde el *O*.

Hallaremos, en seguida, la longitud de un metro colocado en el sistema *O*,. visto desde el *O'*. Para eso, tomaremos también un instante determinado en este último, por ejemplo $t' = 0$, y deduciremos de la (6):

$$t = vx,$$

cuyo valor, sustituído en la (5), da:

$$x' = \beta x (1 - v^2).$$

En esta fórmula haremos como antes $x = 1$ y $x = 0$, restando los valores que resulten para x'. Eso nos dará:

$$\Delta x' = \beta (1 - v^2).$$

Este es el valor de la longitud de un metro colocado en el sistema *O*, visto desde el *O'*; como hemos dicho que $\Delta x = \Delta x'$, obtendremos, finalmente:

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Vemos que la constante β es la inversa del coeficiente de contracción de Lorentz.

Tenemos ya dos fórmulas de transformación: las que expresan los valores de x' y t'. Nos faltan las otras dos: y' y z'. Estos valores no habrán variado porque son dimensiones normales a la dirección del movimiento. Así es que podremos escribir para completar el grupo:

$$y' = y$$
$$z' = z.$$

Comparando estas cuatro fórmulas, que constituyen el llamado grupo de transformación de Lorentz, con las análogas de la mecánica newtoniana, vemos que las dos últimas son iguales, no así las dos primeras.

Estas fórmulas han sido calculadas, indudablemente, para un caso muy particular: el caso simple de que los ejes sean paralelos, la velocidad sea según la dirección de uno de ellos, y que el rayo luminoso tenga también esa misma dirección. Para obtener un grupo de fórmulas más generales, —que por eso mismo serían más complicadas, — no habría más que, una vez conseguido este primer grupo, hacer una transformación de ejes coordenados ejecutando una rotación alrededor del origen, con lo cual el caso particular desaparece y se obtendrán fórmulas conmpletamente generales.

Ahora vamos a deducir del grupo de Lorentz la variación de la longitud y del tiempo, para lo cual hallaremos el largo de un metro y la duración de un segundo en un sistema, apreciado desde el otro.

La longitud del metro nos la dan las fórmulas anteriores. Los valores Δx y $\Delta x'$ no son más que dicha medida, que por lo tanto es igual a:

$$\frac{1}{\beta} = \sqrt{1 - v^2}.$$

Es exactamente la longitud del metro dado por la hipótesis de la contracción de Lorentz; vemos que aquí aparece de nuevo esta contracción pero obtenida de otra manera.

Calculemos, ahora, la duración del segundo. Para eso tenemos que emplear las fórmulas (5) y (6), haciendo desaparecer en ellas x y x'.

Vamos a emplear, por ejemplo, un reloj en reposo en el origen O' del sistema en movimiento. Ese reloj tiene siempre una abscisa $x' = o$, lo cual, empleando la (5), nos dará:

$$x = vt,$$

y sustituyendo este valor en la (6):

$$t' = \beta t\,(1 - v^2) = t\sqrt{1 - v^2}.$$

Haciendo $t' = 1$, $t' = o$, y restando los valores correspondientes de t, obtendremos, como valor del segundo en O' medido desde O:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Observamos que esto resulta ser la inversa del coeficiente de contracción; el segundo se habrá, pues, alargado, parecerá más largo al observador del otro sistema. Así, a medida que la distancia en un sistema en movimeinto con respecto a nosotros, se acorta, el tiempo, se alarga. Es una cierta compensación que después veremos qué consecuencias trae.

En la fórmula (6) vemos que en el valor del tiempo entra la abscisa x, y eso desorienta un poco. Parece, a primera vista, que el tiempo, en un sistema, no sólo dependiera de su velocidad, sino también de la posición del punto; pero no es así, porque como observamos que a su vez la abscisa depende del tiempo, si sustituímos x por su valor, desaparece de la fórmula, quedando el tiempo como función del otro tiempo y de la velocidad. De modo que el tiempo, en un sistema en movimiento con respecto a nosotros, es constante en todo el sistema; depende exclusivamente de la velocidad.

Analizado someramente el grupo de transformación de Lorentz, nos resta apreciar un cierto punto, en el cual vamos a separarnos por completo de los textos que se han escrito sobre esta materia. Para justificar el grupo de Lorentz, para justificar esas variaciones de distancia y de tiempo en un sistema, de acuerdo con su velocidad, los comentadores de Einstein, emplean largos capítulos, traen ejemplos, acumulan descripciones, aclaraciones, de tal manera que parece que estuvieran cogidos en pecado. Sin embargo, creo que, para una persona con algunas nociones de matemáticas, la existencia de esas variaciones no necesita más que una justificación. De acuerdo con nuestros conocimientos, la velocidad de la luz, en dos sistemas, uno en movimiento con respecto al otro, debía ser distinta; pero resulta del experimento de Michelson y Morley que es la misma. Ese es un hecho paradógico; de modo que si las velocidades, que debían ser distintas, resultan iguales, es obvio que los componentes de la velocidad han cambiado de un sistema al otro. Ahora, ¿cuáles son los factores primos de la velocidad? Distancia y tiempo. Luego, para que ese hecho paradógico se cumpla, es necesario que la distancia y el tiempo, que entran en la composición de la velocidad, varíen de un sistema al otro. Esta explicación debe ser suficiente para aceptar las variaciones que implica la transformación de Lorentz.

Hemos visto que del grupo de fórmulas de Lorentz se deducía exactamente la contracción imaginada por este físico conjuntamente con Fitzgerald; pero esta contracción que aparece ahora no es esencialmente igual a la que idearon aquellos dos hombres de ciencia, y no lo es por lo siguiente. De acuerdo con el principio de la relatividad restringida, no se puede dilucidar si un sistema está en movimiento o en reposo con respecto al éter. Por lo tanto, ya no se puede hacer caudal de aquella corriente, de aquel viento de éter, que haría variar las fuerzas eléctricas intramoleculares, y que podía, en consecuencia, transformar la sustancia de que están compuestos los cuerpos. Aquí el éter ha sido dejado

completamente a un lado. En consecuencia, la nueva contracción, no es una modificación íntima de la materia: es simpleplemente la consecuencia de la manera de medir, fundada en la luz, que se somete a ese principio paradógico de la igualdad de velocidades en cualquier sistema. Se pregunta a veces si la contracción de Einstein es real o aparente: es tan real como el método de medida. Hemos fijado una manera de estudiar los fenómenos, basada en la transmisión por medio de la luz; hemos obtenido una ley del movimiento de la luz, y de acuerdo con ese método y de acuerdo con esa ley, deducimos una contracción que es tan real como la manera de medir; pero no es la sustancia que se contrae, sino que nosotros, en nuestra medida, observamos esa contracción.

Ese es el concepto de la contracción de Einstein, que está en oposición con el de Lorentz. En lo sucesivo nos basaremos siempre en el primero.

Se comprende que, cambiado de una manera tan fundamental el grupo de fórmulas de transformación, tienen que variar todas las cuestiones que de él se derivan, y de dicho grupo dependen casi todas las leyes de la cinemática. De modo que casi todas las leyes del movimiento quedarán alteradas por el simple hecho de estarlo dicho sistema. La cinemática einsteniana es distinta de la clásica. Para basarnos en la nueva teoría, debe estudiarse de una manera diferente.

Sin embargo, repetiremos lo que ya tuvimos ocasión de decir en la primera disertación: que esas variaciones no influirán prácticamente en los fenómenos, porque en los casos corrientes de la vida, son imperceptibles. Hemos visto con la curva de la contracción, y lo mismo sucede con el tiempo, que las variaciones se empezaban a apreciar solamente, a partir de velocidades muy grandes. En los hechos comunes pasan desapercibidas: solamente tendrán valor para ciertos experimentos científicos que salen de lo vulgar.

Terminado esto, vamos a describir someramente los experimentos que comprueban la primera parte de la teoría

de Einstein, es decir, la teoría de la relatividad restringida. No crean ustedes que son experiencias vulgares de uso corriente; es natural que tienen que ser experimentos altamente científicos. Vamos a describir solamente los tres más importantes.

Para detallar la primera experiencia, debemos dar una explicación preliminar. De la teoría de la relatividad restringida, se deduce una variación más: es la de la masa. La masa de un cuerpo varía con la velocidad de él, y varía también con la energía interna que pueda tener el cuerpo bajo forma de calor, electricidad, etc. Como la velocidad se traduce también en una cierta energía, que es la cinética, podemos decir que la masa de un cuerpo varía con su energía. La demostración teórica de este hecho, que podría hacerse ya con los conocimientos que poseemos, vamos a dejarla para más adelante, cuando hayamos adquirido ciertas nociones sobre intervalos, que nos facilitarán mucho la tarea; pero como el lugar de la descripción del experimento que comprueba esto, es aquí, vamos a referirnos a él.

Lo que hemos dicho equivale a afirmar, en palabras corrientes, que un cuerpo, si está en movimiento, pesa más, porque tiene una masa mayor, que si está en reposo; que un cuerpo caliente pesa más que uno frío; que un cuerpo cargado de electricidad pesa más que si está descargado. Eso se ha podido verificar, pero es natural que para poder apreciar esas diferencias de masa, haya que valerse de objetos que se muevan con velocidades muy grandes, del orden de la de la luz, por lo que se ha dicho varias veces: que, en velocidades corrientes, las variaciones son imperceptibles.

Los cuerpos conocidos que se mueven con mayor velocidad son los electrones libres de que están compuestas las emanaciones de los cuerpos radioactivos: los rayos β del radio, y los rayos catódicos, obtenidos en tubos de aire enrarecido, por medio de descargas eléctricas.

Supongamos un tubo catódico y dentro de él una corriente eléctrica que produzca ese movimiento rápido del electrón. Esos electrones pueden llegar, con descargas de

80.000 volts, a una velocidad de 150.000 kilómetros por segundo, es decir, la mitad de la de la luz. Ahora, ¿cómo se puede medir la variación de la masa de esos cuerpos infinitamente pequeños? Los electrones son partículas cargadas de electricidad; la electricidad es atraída o repelida por la electricidad. En consecuencia, si esos electrones en su viaje, tienen que pasar cerca de una fuente eléctrica, serán atraídos. y por lo tanto desviados de su camino. Si hacemos pasar los electrones en libertad, que constituyen los rayos catódicos, entre los dos platillos de un condensador, se verán separados de su camino, y esa desviación será tanto menor cuanto mayor sea su velocidad, porque variará en sentido inverso de la inercia de la partícula, la cual lo hace en el mismo de la velocidad.

Pero, por otra parte, la electricidad que contienen los electrones en movimiento está también en movimiento, es decir, que forma una corriente eléctrica, y sabemos que las corrientes son atraídas por los electroimanes. Así es que, haciendo pasar también los electrones en libertad entre los polos de un electroimán, se verán desviados de su recorrido, y esta desviación aumentará con la velocidad, porque al aumentar la velocidad del electrón, aumenta la de la corriente que contiene, y en consecuencia, mayor efecto producirá el electroimán.

Así que vemos, que tanto la electricidad de un condensador como el magnetismo de un electroimán, desviarán los rayos catódicos de su recorrido, pero de manera distinta, y concebimos que, comparando esas dos desviaciones, se puede deducir la masa del electrón y su velocidad. Se ha podido, en esa forma, apreciar que dichos corpúsculos llegan a tener una masa décupla de la que poseían en reposo.

Han sido los físicos Guye y Lavanchy los que han conseguido, después de años de trabajo, realizar el experimento descrito en una forma impecable, rodeado de las mayores garantías. En sus experiencias, la influencia magnética de la Tierra era anulada por cuadros compensadores, recorridos por corrientes eléctricas.

Habiendo llegado a este punto, no puedo resistir a la tentación de hablarles dos palabras sobre un asunto que es ajeno, puede decirse, a la teoría: me refiero a la nueva hipótesis sobre la constitución de la materia.

Dijimos que los electrones contienen electricidad, y se sabe que los cuerpos cargados oponen cierta resistencia para ponerse en movimiento y para detenerse, es decir, que tienen una inercia especial, una inercia eléctrica, fuera de la natural debida a la masa. Así que un cuerpo cargado de electricidad, como el electrón, tiene en realidad dos masas: una natural, efectiva, y otra que es la masa eléctrica debida a la corriente, que opone cierta resistencia a la puesta en marcha y a la parada, por un fenómeno de self-inducción. Por medio de los experimentos de Guye y Lavanchy, se ha podido despejar, separar esas dos masas; y se ha llegado a una conclusión desconcertante: los electrones no tienen masa real alguna; toda su masa es de origen eléctrico. De acuerdo con esto, la materia no es más que una aglomeración de electricidades, en condiciones determinadas.

Describamos el segundo experimento probatorio. El espectro presenta una serie de rayas oscuras, que a su vez se dividen en otras más finas. Esas rayas del espectro, responden a las distintas sustancias primas contenidas en el foco luminoso. La distribución de esas rayas y su posición relativa, no eran fácilmente explicables. Sin embargo, debido a los trabajos sumamente laboriosos de Sommerfeld, la aplicación de la teoría de la relatividad restringida al estudio del movimiento de los electrones, hace de manera que el problema se explique en una forma matemática.

La tercera prueba es, a mi modo de ver, la más clara de las tres. Se refiere al experimento de Fizeau, de que ya hemos hablado. Fizeau, basado en los trabajos de Fresnel llegó a demostrar, como ya dijimos, que la luz, dentro del agua en movimiento, no se propagaba con una velocidad suma de la de la luz en el agua en reposo y de la del agua, sino que dicha velocidad era igual a la primera más una cierta fracción de la segunda, lo cual hacía creer que el éter era parcialmente arrastrado por los cuerpos. Era la com-

probación del famoso coeficiente de arrastre de Fresnel. Esta experiencia no tuvo más explicación que la de Fresnel, y fué siempre un caso de discordia dentro de la ciencia. Sin embargo, vamos a ver que la teoría de la relatividad, de una manera que no se puede calificar sino de magistral, explica, por la simple aplicación de una fórmula, el experimento de Fizeau, y en consecuencia pone de acuerdo las tres hipótesis distintas sobre la inmovilidad del éter.

Supongamos, en la figura 1, que el sistema O sea aquel en que está el observador, y que el O' esté fijado al agua en movimiento. Admitamos que en el sistema O' hay un rayo de luz que se propaga según el eje X'. Si tuviéramos que aplicar en este caso la fórmula de la mecánica newtoniana para hallar la velocidad de la luz con respecto al observador, escribiríamos simplemente una suma de velocidades:

$$w = c' + v, \qquad (7)$$

siendo c' la velocidad de la luz en el agua en reposo, y v la del agua.

Sin embargo, la fómula de Fresnel, comprobada por Fizeau, es:

$$w = c' + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) v,$$

en la que n es el índice de refracción de la luz en el agua, es decir, el cociente de las velocidades de la luz en el vacío y en el agua: $\frac{c}{c'}$.

Ahora bien, vamos a tratar de hallar la fórmula (7) de composición de velocidades, pero de acuerdo con el grupo de transformación de Lorentz. Para eso, escribimos la ecuación del recorrido del rayo de luz en el sistema O'; será:

$$x' = c' t'.$$

Queremos pasar de esta ecuación a la correspondiente al primer sistema, para hallar la velocidad de la luz con res-

pecto al observador en reposo. Para eso sustituiremos x' y t' por sus valores dados por el grupo de Lorentz; resultará:

$$x = \frac{c' + v}{1 + c' v} t.$$

Ahora, x es la abscisa del rayo luminoso en el sistema O; si es igual a una constante multiplicada por el tiempo, esa constante es la velocidad; así que:

$$w = \frac{c' + v}{1 + c' v}.$$

Si efectuamos la división, y despreciamos los términos de orden superior al primero en v del resto, debido a su pequeñez — por hacer c, velocidad de la luz en el vacío, igual a la unidad, v es una cantidad muy pequeña, — obtendremos:

$$w = c' + (1 - c'^2) v.$$

Pero $n = \frac{c}{c'} = \frac{1}{c'}$, de donde: $c'^2 = \frac{1}{n^2}$, lo cual sustituído en la fórmula anterior, da exactamente la de Fresnel.

Es un resultado simplemente admirable. Un fenómeno que había constituído durante tantos años la pesadilla de los sabios, para explicar el cual se había tenido que idear una hipótesis especial sobre la movilidad del éter, viene a demostrarse de una manera clara y sencilla por la aplicación de una fórmula de composición de velocidades. No puede haber una prueba más concluyente.

Para terminar, debo decir dos palabras solamente sobre el éter en la teoría de la relatividad restringida. El éter, esa sustancia que ha dado tanto que hacer a los físicos, había ido perdiendo poco a poco todas sus propiedades a medida que la ciencia avanzaba. El éter concebido por Lorentz, último jalón antes de llegar a Einstein, ya era un éter que

no tenía más propiedad que la inmovilidad. Era una substancia completamente inmóvil, que servía de vehículo a los fenómenos ópticos y electromagnéticos. Pero Einstein, viendo en su principio, que no se puede reconocer si un sistema está en reposo a en movimiento uniforme con respecto al éter, le quita esta última cualidad y lo hace desaparecer por completo del cuadro de lo existente. El éter, en la teoría de la relatividad restringida, desaparece. Einstein no dice si es móvil o inmóvil: lo ignora; no existe, porque no le hace falta para nada para deducir sus fórmulas, y en consecuencia lo desconoce. Veremos que después, en la teoría generalizada, Einstein, con una flexibilidad de voluntad extraordinaria, vuelve a admitir, obligado por la necesidad, la existencia del éter. Es una cosa que, mirada a fondo, le hace realmente honor.

LECCIÓN IV

SUMARIO: Intervalo. — El mundo tetradimensional de Minkowski: concepción.

Vamos a escribir de nuevo el grupo de fórmulas de Lorentz, hallado, como ya hemos dicho, por este sabio, trabajando sobre las ecuaciones electromagnéticas de Maxwell:

$$
\begin{aligned}
x' &= \beta (x - vt) \\
y' &= y \\
z' &= z \\
t' &= \beta (t - vx).
\end{aligned}
$$

Hemos hecho notar en la lección anterior, la diferencia entre las concepciones de Lorentz y Einstein sobre la contracción. Debemos decir dos palabras ahora, sobre sus diferentes conceptos del tiempo.

Vemos que en el grupo existe el tiempo t', que es el *tiempo local* admitido por Lorentz; pero la diferencia entre la interpretación de Einstein y la de aquel físico, en este punto, es igualmente sensible.

Dijimos en la primera disertación, que Lorentz había ideado ese tiempo local como un simple artificio matemático, para obtener que la transformación de las ecuaciones de Maxwell, resultara de la misma forma, no dando ningún valor real a esa ficción. La consideró siempre como un puro y simple artificio matemático. Einstein afirmó después, que el tiempo local era el verdadero: que era el tiempo que medía un observador sobre un reloj colocado en otro sistema de referencia que el suyo. Hay pues, aunque la fórmula se ha conservado inalterada, diferencias de interpretación en cuanto al significado, según el punto de vista de los dos sabios.

En el grupo de fórmulas vemos que, tanto el espacio

como el tiempo sufren alteraciones de acuerdo con el movimiento del observador, es decir, que ese espacio y ese tiempo, que habían sido considerados siempre, antes, cuando regía la mecánica clásica, como cosas constantes e inalterables, ahora resultan esencialmente variables, con variaciones que dependen exclusivamente del movimiento del observador con respecto a los fenómenos observados.

Así es que si ahora el tiempo y el espacio son cosas variables por naturaleza, cabe preguntar: ¿qué es lo que permanece constante en la observación de un fenómeno mecánico o físico?

Llámase *acontecimiento* a un punto determinado del espacio, en un instante también determinado. Si existen dos acontecimientos, una partícula puede recorrer la distancia que los separa, saliendo del primer punto en el instante que le corresponde, y llegando al segundo en el momento que también le corresponde. Pero, tanto el espacio recorrido por esa partícula, como el tiempo empleado, son cantidades variables de un observador a otro, y en consecuencia, nos quedaría la impresión de que ese fenómeno — fenómeno constituído por la trayectoria de la partícula, — fuera una cosa completamente incierta y fluctuante, que dependiera exclusivamente del punto de vista del observador. Entonces debemos buscar, para que determine ese fenómeno, alguna cosa que quede constante, que sea una invariante, según se cambie de un observador a otro. Para encontrar esa cantidad, vamos a empezar por el caso simple de dos coordenadas.

En la mecánica clásica, si tenemos dos puntos en un sistema plano, las coordenadas de ellos son variables según se cambie de sistema de referencia, pero si escribimos una fórmula que nos dé la distancia entre los dos puntos, a pesar de que nosotros cambiemos el sistema de ejes, esa medida de la distancia resultará constante. Así que ya tenemos una guía para llegar a lo que deseamos. Esa distancia está expresada por:

$$s^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2,$$

siendo x_0 y_0, x_1 y_1 las coordenadas de los dos puntos.

Si pasamos a un sistema del espacio, esto se repite; las coordenadas de los puntos son variables de un sistema al otro, pero su distancia se conserva constante. La fórmula, sería en este caso:

$$s^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2.$$

Sin embargo, de acuerdo con la nueva teoría, estas distancias tampoco resultan invariantes. Vamos a extender la concepción a cuatro ejes, haciendo entrar el tiempo que es lo que nos falta, y veamos si la cantidad que resulta llena la condición. Escribiremos, pues, la ecuación de la distancia en un sistema de cuatro ejes coordenados, entre los dos, ya no puntos, sino acontecimientos, en la forma siguiente:

$$s^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 - (t_1 - t_0)^2$$
$$= \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - \Delta t^2.$$

Esta fórmula, que nos da la distancia en cuatro dimensiones, entre los dos acontecimientos, presenta una diferencia fundamental con las anteriores, y es el signo menos delante de la diferencia de los tiempos. Si hubiera imitado a las otras fórmulas en su constitución, debía haber llevado el signo más, pero en esa forma no hubiera resultado una invariante, que es lo que buscamos. Con el signo menos en cambio, podemos escribir:

$$s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - \Delta t^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 - \Delta t'^2,$$

lo cual se verifica sustituyendo x', y', z', t', por sus valores dados por el grupo de Lorentz.

Hemos llegado pues a una fórmula que nos da una especie de distancia entre los dos acontecimientos en cuatro dimensiones: esa distancia, que no tiene interpretación física alguna, es lo que se llama *intervalo.*

Según hemos dicho recién, la expresión del intervalo, a causa del cambio de signo que ha debido hacerse en ella para que resultara una invariante, no es de la misma naturaleza

de las anteriores, no es homogénea. Así que podemos decir que la inclusión del tiempo en el sistema de coordenadas, hace que la geometría del conjunto no sea euclidiana. La geometría de esta fórmula se llama semi-euclidiana o hiperbólica.

Ahora, debido a la unidad que hemos adoptado para el tiempo — hemos dicho que por tomar la velocidad de la luz igual a la unidad, cada segundo debe ser interpretado como trescientos mil kilómetros, — resulta que para móviles que tienen todos, como sabemos, velocidades inferiores a la de la luz, Δt^2 tendrá un valor mayor que la suma de los tres términos restantes, suma que resulta ser Δl^2, cuadrado de la distancia entre los dos puntos. Entonces resultará que, puesto que el término negativo es mayor, s^2 será negativo, y el intervalo que andamos buscando aparecerá como una cantidad imaginaria, lo cual no nos conviene. Por eso se ha aceptado cambiar en la fórmula todos los signos, a fin de que resulte una cantidad real. La expresión que emplearemos, pues, en lo sucesivo, será:

$$s^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2.$$

Podemos ahora ver qué relación geométrica tienen las tres cantidades que entran en esta fórmula, y decimos tres, porque los tres últimos términos del segundo miembro se agrupan, como hemos dicho, en una única cantidad Δl^2. Vemos fácilmente que dichas cantidades forman los lados de un triángulo rectángulo, en el cual un cateto es s, el otro Δl, y la hipotenusa, Δt. En este triángulo sabemos que s se mantiene constante al cambiar el observador; los otros dos lados varían. Como el triángulo tiene que mantenerse siempre rectángulo, la variación, del punto de vista de un observador a otro, expresada geométricamente, será una rotación de la hipotenusa alrededor del vértice B. Vemos entonces que la distancia Δl entre los dos puntos, puede irse reduciendo paulatinamente hasta llegar a cero, en el momento en que la hipotenusa se confunde con el cateto horizontal. En ese caso, la distancia entre los dos puntos se anula, y el inter-

valo se hace igual al tiempo que transcurra entre los dos acontecimientos.

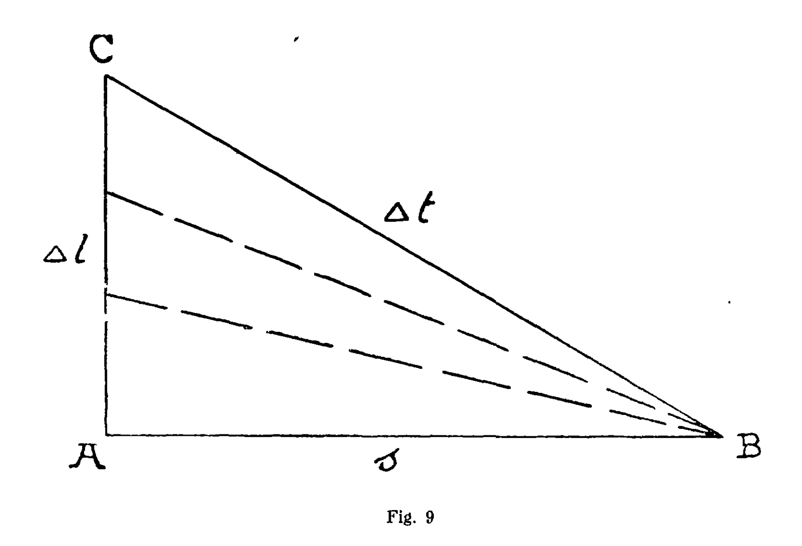


Fig. 9

El caso, materializado, es el siguiente. Dada una partícula, si tomamos un sistema de ejes coordenados independiente de ella, el tiempo y el espacio que median entre los dos acontecimientos original y final de la trayectoria, están dados por la hipotenusa y el cateto del triángulo; pero si queremos llegar a este caso límite, no tenemos más que tomar un sistema de ejes rígidamente ligado a la partícula. Entonces, al desplazarse ésta, resultará que el recorrido en el espacio es nulo, porque el sistema la acompaña. Siendo nula la distancia en el espacio, el intervalo se transforma en el tiempo empleado desde la salida a la llegada, cosa que se ve claramente en la fórmula. En consecuencia, podemos decir que el intervalo es el tiempo propio que emplea la partícula en hacer la trayectoria entre los dos acontecimientos con movimiento rectilíneo y uniforme.

Para la luz, el intervalo es siempre nulo, porque por la elección de unidad que hemos hecho, resulta que la luz en un segundo marcha 300.000 kilómetros, y un segundo estará

representando por la misma cantidad. Así que Δl se hace igual a Δt y su diferencia es nula. Luego, la representación geométrica, para el desplazamiento de un rayo luminoso, será una recta vertical, en la cual habrán coincidido el tiempo y la distancia; el intervalo se reduce a un punto en el extremo inferior.

Vemos, pues, que de un observador a otro, la división de un intervalo, de una trayectoria de una partícula, varía. El observador dividirá en tiempo y en espacio ese intervalo, según su movimiento, y podrán haber todas las divisiones posibles.

Ya en la mecánica clásica se hacía esta unión, esta alianza del tiempo y el espacio. Conocemos problemas de termo-dinámica, de gases y muchos otros, en que se combinaban estos dos elementos, haciéndose diagramas con ellos; pero hay una diferencia fundamental entre esa representación tetradimensional de la mecánica clásica y la de la mecánica de la relatividad, que consiste en que, mientras en la primera, una vez combinado el tiempo con el espacio, al separarlos de nuevo, no se podía hacer más que en la forma en que se habían combinado, en la relatividad, se pueden descomponer en multitud de formas distintas a la que ha dado origen a la combinación. Según la imagen de Eddington, en la mecánica antigua, la unión de espacio y de tiempo podía representarse por un cubo que se hubiera formado por la superposición de una serie de planos, en tal forma que al quererlo dividir de nuevo, ello se hace naturalmente según los mismos planos que lo habían compuesto. En cambio, en la mecánica de la relatividad, esa combinación se asemeja a un cubo que estuviera compuesto de una substancia homogénea que, naturalmente, no pudiera dividirse en un sentido determinado, pero que, artificialmente, pudiera sufrir cortes en todas las direcciones posibles.

Entrando ya de lleno al estudio del mundo de cuatro dimensiones, mundo tetradimensional, creemos lo más oportuno empezarlo con las palabras pronunciadas por Minkowski, en un congreso realizado en Alemania en el año 1898. Las

palabras del matemático alemán, al presentar su informe, que creaba, puede decirse, el mundo de cuatro dimensiones, son las siguientes: "Las consideraciones sobre el espacio y el tiempo, que acabo de exponeros, están basadas en la física experimental, y es eso lo que constituye su fuerza. Ellas son de tendencia revolucionaria. De hoy en adelante las nociones de tiempo y de espacio, considerados como independientes y aislados, deben desaparecer, y sólo su unión íntima puede subsistir". Quiere decir que el tiempo y el espacio por separado, en el estudio de los fenómenos, tenían que desaparecer, y que ese estudio solamente podía hacerse sobre una unión íntima de esos elementos, en una combinación de las cuatro coordenadas.

El origen de la geometría de más de tres dimensiones se remonta a Riemann. Este famoso matemático, en su clásica memoria, presentada a la Universidad de Gottingen en el año 1854, para optar al título de profesor de la misma, sentó las bases de la geometría de *n* dimensiones, preguntándose seguramente, ya que una ecuación con dos coordenadas significa la descripción de un fenómeno sobre una superficie, si una de tres representa al estudio de un fenómeno en el espacio, ¿que quería decir una ecuación de más de tres coordenadas? Y aun cuando él, probablemente, no concibió el mundo de cuatro dimensiones tal cual es ahora, sentó el precedente de que se podía, sobre más dimensiones que tres, establecer una geometría tan perfectamente coherente, tan perfectamente completa como la usada, y dió las principales leyes de esa geometría.

En realidad, los trabajos de Riemann no tuvieron aplicación práctica hasta que la teoría de la relatividad tomó vuelo. Recién para la combinación del tiempo y el espacio, se llegó a un caso práctico: á la conveniencia de hacer el estudio de los fenómenos en cuatro coordenadas. Antes, era simplemente una especulación científica.

Ya vimos que en las fórmulas de Lorentz están íntimamente ligados el espacio y el tiempo; ellas implican que el estudio de los fenómenos debe hacerse con las cuatro coordenadas simultáneamente, sin tratar de separarlas, porque

aisladamente no tienen valor. Vimos también, que para obtener una cantidad invariante, necesaria para la determinación de cualquier fenómeno, no bastaba el tiempo aisladamente, ni tampoco el espacio: se necesitaba una unión íntima de las cuatro coordenadas para obtener la expresión buscada.

La geometría de cuatro dimensiones fué siempre muy difícil de concebir, y esto estriba principalmente en que no se puede representar gráficamente: los cuatro ejes no pueden colocarse en una figura. Sin embargo creo que, para una persona con cierta preparación matemática, el hecho de no poder *visualizar* — como se dice ahora, — un fenómeno cualquiera, no es causa de que no se pueda concebir. Muchas cosas que no podemos ver ni materializar, se pueden, sin embargo, concebir perfectamente, y prueba de ello son las tantas creaciones del cálculo infinitesimal, las cuales, no siendo materializables, son perfectamente concebibles. Indudablemente, la causa de que no se pueda apreciar *de visu* las cuatro dimensiones, es el hecho de que dos observadores interpreten de distinta manera las cosas. Un observador ve un fenómeno de una manera especial; otro, que está animado de un movimiento distinto, lo ve de otra manera, con el tiempo y la distancia alterados. Si una misma persona pudiera ver simultáneamente el mismo fenómeno bajo dos aspectos distintos, el mundo tetradimensional sería una cosa tan visible como el mundo de tres dimensiones. Por eso el profesor Eddington — en una observación que demuestra el *humour* inglés — dice, que si nuestros dos ojos, por la distancia que los separa nos permiten apreciar las tres dimensiones — porque nos permiten observar el relieve de las cosas, — una persona dotada de dos ojos de los cuales uno se moviera rápidamente con respecto al otro, vería el mundo tetradimensional en una forma completa.

Indudablemente se pueden hacer algunas representaciones gráficas del conjunto de las cuatro dimensiones. Por ejemplo, si trazáramos un ángulo tetraedro en el cual las caras tuvieran una abertura igual, determinada, podríamos,

dadas cuatro coordenadas, por un sistema de paralelógramos, determinar un punto, de manera que cada conjunto de coordenadas corresponderían a un acontecimiento único, y recíprocamente, cada acontecimiento diera cuatro coordenadas determinadas. Pero esta representación adolecería del defecto

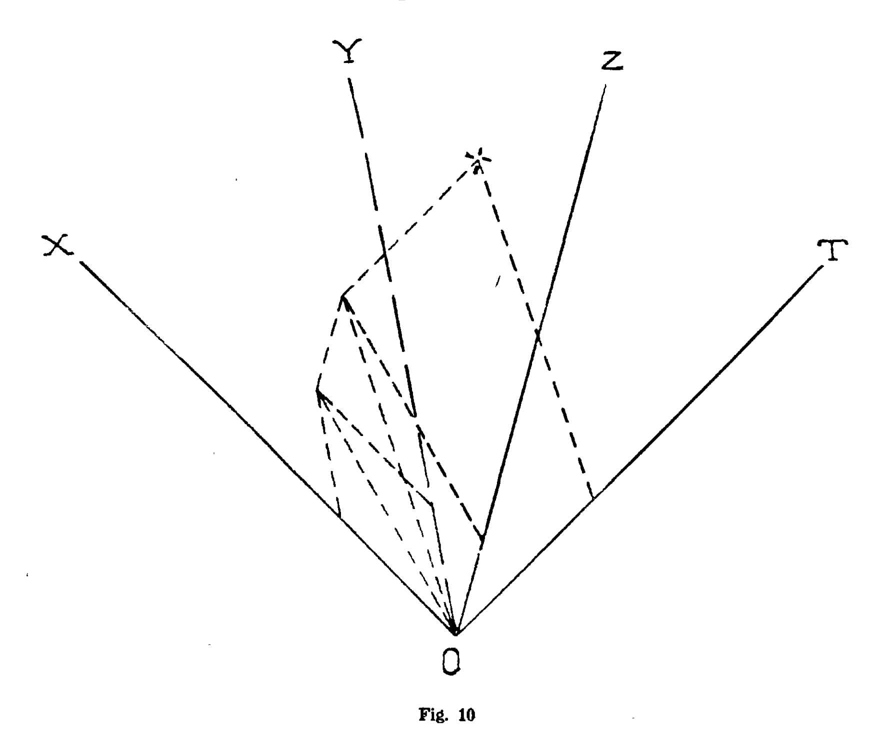


Fig. 10

de no ser real. Los tres ejes de espacio, que deben ser entre sí perpendiculares, no lo son, y el del tiempo se introduce junto a los otros en una forma ficticia.

Veamos ahora esta otra representación. Supongamos los tres ejes de espacio *X*, *Y*, *Z*, en su posición clásica, y que *O C* sea el recorrido espacial de una partícula. Si trazamos ahora, a un lado y otro de esta trayectoria, dos líneas que forman una franja tal que el ancho de ella es igual al tiempo a partir del origen *O*, esta representación nos daría una idea completa de la trayectoria de la partícula en

sus cuatro dimensiones. En la figura podemos apreciar por ejemplo, que la velocidad de la partícula es pequeña de *O* a *A*, puesto que el tiempo aumenta rápidamente; que esa velocidad se hace grande desde *A* a *B*, etc. Pero esta interpretación tiene otro defecto que la hace inconveniente también, y

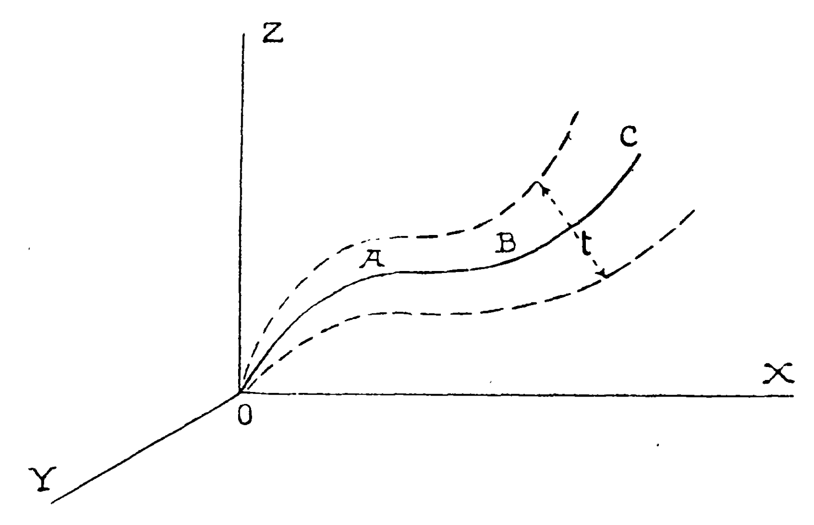


Fig. 11

es que no hace entrar en la misma forma las cuatro dimensiones. Y ese es el fin del mundo tetradimensional: hacer de modo que el tiempo desempeñe un papel igual a las otras tres coordenadas. Aquí aparece completamente separado: es pues una representación artificiosa.

La mejor manera de poder representar lo que deseamos, es hacerlo parcialmente, suprimiendo algunos de los ejes. En seguida vamos a dar algunos ejemplos para aclarar este procedimiento.

Minkowski, fundador del mundo tetradimensional, creó además un artificio: el del tiempo imaginario. Este matemático pensó que si pudiera hacerse la fórmula del intervalo, homogénea, es decir, si delante del tiempo pudiera ponerse el signo más en lugar del menos, se llegaría a facilitar el estudio de todas estas cuestiones, y en consecuencia propuso sustituir el tiempo por otro imaginario:

$$\tau = t\sqrt{-1}.$$

La introducción de este tiempo imaginario hace que la fórmula resulte completamente homogénea:

$$s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 + \Delta \tau^2.$$

Si queremos hacer de manera que la distinción entre las cuatro coordenadas desaparezca por completo, podemos llamarlas x_1, x_2, x_3, x_4, con lo cual, la fórmula será:

$$s^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 + \Delta x_4^2.$$

Escrita de este modo, ella es competamente homogénea, y se le pueden aplicar todos los principios de esta clase de ecuaciones.

La sustitución del tiempo real por el imaginario trae

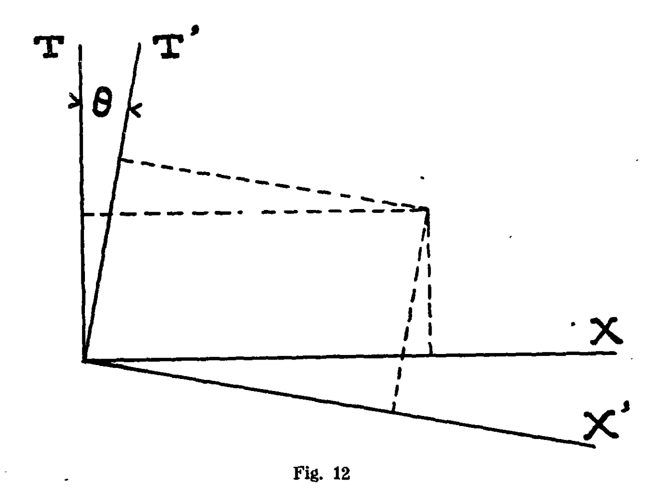


Fig. 12

ctra ventaja: que la transformación de Lorentz puede sustituirse por una simple rotación de los ejes coordenados. En efecto, supongamos que hacemos girar los ejes X, T, del án-

gulo Θ alrededor del origen, llamando los nuevos ejes, X' T'; las fórmulas de transformación serán:

$$x' = x \cos \Theta - \tau \operatorname{sen} \Theta$$
$$\tau' = \tau \cos \Theta + x \operatorname{sen} \Theta.$$

Si ahora hacemos la hipótesis $i \operatorname{tg} \Theta = v$, siendo v la velocidad de un sistema de ejes coordenados con respecto al otro de la transformación de Lorentz, resultará:

$$\cos \Theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \Theta}} = \beta$$

valor que sustituído en las fórmulas anteriores, dará:

$$x' = \beta \left(x - \frac{v}{i} \tau \right)$$
$$\tau' = \beta \left(\tau + \frac{v}{i} x \right).$$

Si pasamos ahora del tiempo imaginario al real, estas fórmulas se transforman en las de Lorentz.

Así que vemos que, con la introducción del tiempo imaginario, la transformación de Lorentz es equivalente, matemáticamente, a una rotación de los ejes coordenados alrededor del plano Y Z. Este es un simple artificio matemático. No tiene otro objeto que hacer equivalente la transformación de Lorentz, que es complicada, a una rotación de los ejes coordenados, cuyas fórmulas nos son más familiares.

Hay también otra ventaja en la adopción del tiempo imaginario. Empleándolo se puede obtener la representación del intervalo entre dos acontecimientos por medio de un vector. Sabemos que vectores son entidades cuyas proyecciones gozan de las mismas propiedades que las coordenadas, es decir que, dado un vector cuyas proyecciones sean X, Y, Z, en la geometría de tres dimensiones, podemos hacer cualquier transformación con este vector empleando para sus

proyecciones las mismas fórmulas que se usan para hacer la transformación de las coordenadas de los puntos. Ahora, con cuatro dimensiones, y con el tiempo imaginario — el cual permite a esas cuatro dimensiones entrar homogéneamente en la fórmula, — podemos formar un vector cuyas proyecciones sean Δx, Δy, Δz, $\Delta \tau$ y él será justamente el intervalo. Esto permite aplicar a dichos intervalos todas las propiedades de los vectores.

Pero para hacer las representaciones gráficas a que nos hemos referido, las cuales nos facilitarán la comprensión de las cuatro dimensiones, vamos a suprimir de nuevo el tiempo imaginario, que nos traería complicaciones, y volver al real. La primera representación que haremos será suprimiendo las y, z, y estudiando solamente los ejes X, T. Suprimir los ejes Y, Z, equivale a estudiar los fenómenos que tienen lugar sobre una línea recta que es el eje de las x.

Supongamos que sobre los ejes X y T existan las partes positivas y negativas de costumbre. El punto O, origen de este sistema, es el lugar donde está el observador en el instante presente. Para describir en este diagrama la propagación de los rayos luminosos, tenemos que trazar dos rectas a 45°; estas líneas tienen por ecuación:

$$t^2 - x^2 = 0,$$

puesto que el primer miembro representa el intervalo — por no tenerse en cuenta y ni z, — que sabemos ser nulo para la propagación de los rayos de luz.

Esas dos rectas, representando rayos luminosos, lo hacen de distinta manera. El rayo $A\ B$ será uno que viene del pasado y de la parte negativa del eje de las x, pasa por el punto donde está el observador en el instante actual, y se dirige hacia el futuro por la parte positiva de dicho eje. El otro es a la inversa.

Estos dos rayos luminosos dividen el plano en cuatro sectores, en cuatro ángulos. De éstos, hay uno que corresponde, indudablemente, al pasado: es el $A\ O\ C$; otro corresponde al futuro, que es el $B\ O\ D$. En efecto, una partícula

material podrá hacer la trayectoria entre el acontecimiento *O* y uno ubicado en el ángulo *B O D*, por ejemplo, por necesitarse para ese recorrido una velocidad inferior a la de la

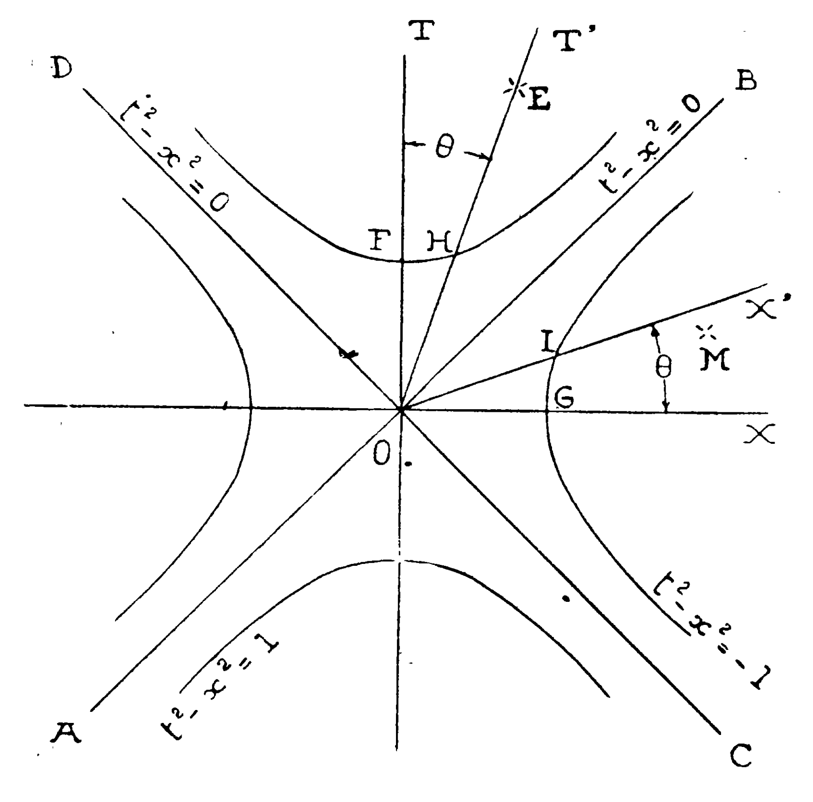


Fig. 13

luz, y, pudiendo hacer esa trayectoria, no hay duda que el segundo acontecimiento es posterior al *O*.

En cambio, los ángulos *A O D* y *B O C* no son ni del pasado ni del futuro: son regiones indeterminadas, y los acontecimientos que tienen lugar en ellas, pueden ser anteriores o posteriores al *O*, según el sistema de ejes coordenados que se elija, o sea, según el movimiento del observador.

Para que esto no parezca una paradoja, recordemos que se ha probado ya que la simultaneidad no es una cosa abso-

luta, sino relativa, que dos hechos simultáneos para un observador no lo son para otro, con lo cual puede llegarse a concebir que un acontecimiento pasado para una persona pueda ser futuro para otra. Esto lo veremos de inmediato, con toda precisión.

Para hacer el cambio sobre el diagrama, del sistema de ejes coordenados que hemos elegido a otro, debemos obrar en la forma siguiente. Tracemos dos hipérbolas; la de ecuación

$$t^2 - x^2 = 1,$$

y la

$$t^2 - x^2 = -1,$$

las cuales tienen por asíntotas las rectas que simbolizan los rayos luminosos. Estas curvas, debido a su ecuación, representan el lugar común de todos los acontecimientos separados de O por un intervalo igual a 1 o — 1. Ahora, si queremos hacer un cambio de ejes coordenados tal que traiga la partícula que recorre el intervalo $O\ E$ al reposo — traer una partícula al reposo quiere decir elegir un sistema rígidamente unido a ella, con lo cual la partícula no sufre desplazamiento espacial alguno, o sea, queda inmóvil, — tenemos que elegir $O\ E$ como eje T', y en esas condiciones, recorriendo la partícula el eje del tiempo, no camina en el espacio.

Nos falta ahora determinar el eje X'. Por lo pronto, las unidades adoptadas por el primer observador — el que usa X y T, — son, para el tiempo, la magnitud $O\ F$, y para la distancia, la $O\ G$, como se deduce de las ecuaciones de las hipérbolas. Para el otro observador, la unidad de tiempo será $O\ H$, lo que resulta de la comparación de las propiedades de la hipérbola con las fórmulas de Lorentz. Para tener el nuevo eje de las x, deberemos trazar una recta que forme con X el mismo ángulo Θ que T' forma con T, y sobre este eje la unidad será $O\ I$, cosa que se prueba en la misma forma.

De modo que el nuevo observador tendrá sus dos ejes coordenados oblícuos, y sus unidades, que resultan iguales para el tiempo y el espacio, son las longitudes de dos semi-

diámetros conjugados de las hipérbolas, como lo eran las dos primeras.

Dado un fenómeno cualquiera, el primer observador lo localizará trazando las dos proyecciones rectangulares; el otro trazará las proyecciones oblícuamente, según los nuevos ejes.

De aquí, de este cambio de ejes coordenados, vamos a deducir lo que dijimos antes: que los acontecimientos de los ángulos *A O D, B O C,* no son, absolutamente, ni anteriores, ni posteriores al *O,* sino que eso dependerá del punto de vista del observador. En efecto, un acontecimiento cualquiera, supongamos el *M,* para el primer observador, que tiene su sistema de ejes rectangulares, por estar por encima del de las *x,* está en el futuro de *O.* En cambio, el segundo verá este mismo acontecimiento debajo del eje de las *x',* y en consecuencia lo considerará anterior al *O.*

La explicación de este fenómeno, que parece complicado, es la siguiente. No hay ninguna partícula material que pueda describir el recorrido *O M,* porque para ello tendría que poseer una velocidad superior a la de la luz. En estas condiciones, los dos acontecimientos están en situaciones tan próximas de tiempo, que el orden de sucesión de ellos puede ser invertido por el movimiento del observador.

Vemos pues que, dado un acontecimiento cualquiera situado en el ángulo del pasado o en el del futuro, eligiendo un eje de los tiempos tal que pase por ese acontecimiento, llevaremos la partícula que hace la trayectoria del origen a él al reposo, y entonces dicho intervalo se verá reducido al tiempo transcurrido. Estos vectores, que pueden transformarse en tiempo, anulando el espacio, se llaman *temporales.* En cambio, con los vectores obtenidos uniendo el origen con un punto de los ángulos indeterminados, no puede hacerse semejante cosa; no puede hacerse pasar un eje de las *t* por los dos puntos: pero sí un eje de las *x*, con lo cual resultará que esos dos acontecimientos estarán separados por una distancia, anulándose el tiempo entre ellos; estos vectores, obtenidos uniendo el origen con un punto de los ángulos indeterminados, se llaman *espaciales.*

Para hacer entrar ahora un tercer eje, el de las y por ejemplo, debemos suponerlo perpendicular al plano X T en el punto O. Para obtener en el espacio la figura correspondiente a la que hemos trazado para el plano, haremos girar

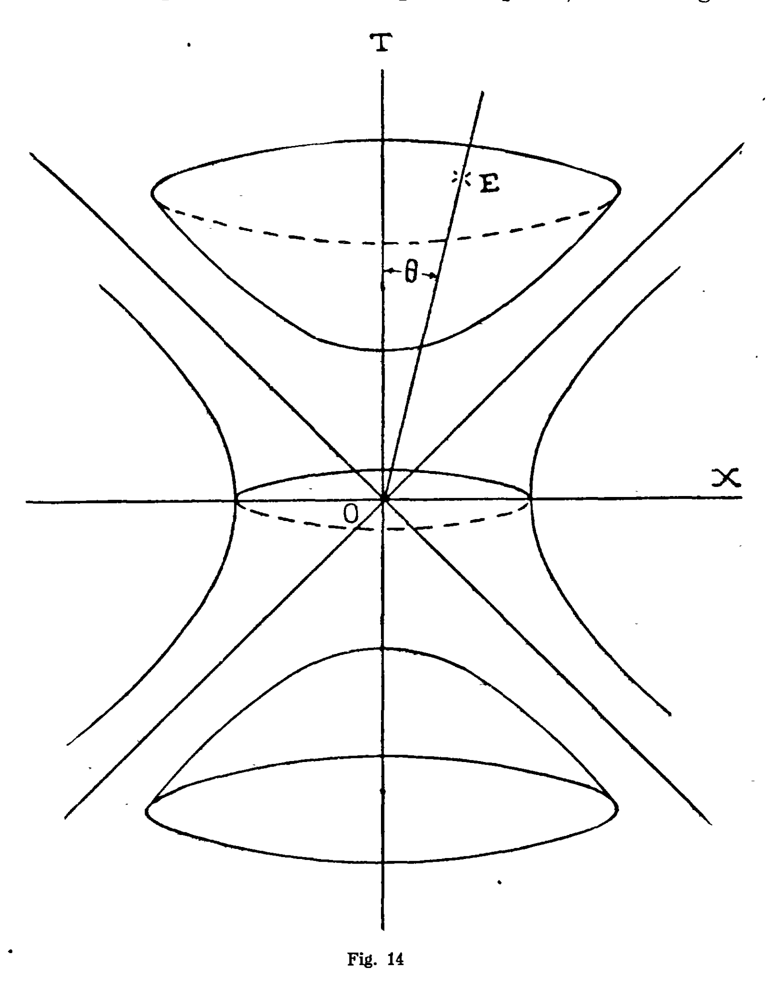


Fig. 14

todo alrededor de T, con lo cual la **hipérbola** $t^2 - x^2 = 1$ se transformará en un hiperboloide de dos hojas; las rectas se convertirán en un cono de dos napas, y la hipérbola $t^2 - x^2 = -1$ en un hiperboloide de una hoja, del cual dibu-

jamos la sección central. Las ecuaciones de estos hiperboloides son:

$$t^2 - x^2 - y^2 = 1$$
$$t^2 - x^2 - y^2 = -1.$$

Todos los puntos que están dentro de la napa inferior del cono representarán acontecimientos del pasado de *O*; todos los que se encuentran dentro de la superior, acontecimientos del futuro. Los puntos que estén fuera del cono pueden representar acontecimientos pasados o futuros, según el observador.

Aquí, para hacer el cambio de ejes coordenados, de modo que la partícula que hace el recorrido *O E* esté en reposo, tomaremos, como antes, por eje *T'* la recta *O E*. Para encontrar los ejes *X'* e *Y'*, tomaremos una recta perpendicular a *O T* y *O E*, y alrededor de ella haremos girar el plano *X Y* en sentido contrario a las agujas de un reloj, de un ángulo Θ: el nuevo plano será *X' Y'*. Este plano cortará el hiperboloide de una hoja, según una elipse; pero esa elipse, en las nuevas unidades del observador, será una circunferencia, tal como lo es la intersección del plano *X Y* con dicha superficie. Ahora, en esa elipse, eligiendo dos diámetros conjugados cualesquiera, se tienen los nuevos ejes *X'*, *Y'*.

La transformación de un sistema de ejes coordenados a otro, admitiendo ya tres ejes, consiste pues en lo siguiente: para llevar la partícula al reposo, se toma por eje *T'* la recta *O E*, y se hace girar el plano *X Y* de un ángulo Θ alrededor de una recta perpendicular al plano *T O E*. El nuevo plano, que es el *X' Y'*, determinará sobre el hiperboloide una elipse, de la cual dos semi-diámetros conjugados cualesquiera darán *X'* e *Y'*. Las unidades que empleará el nuevo observador serán: para las *t'* la distancia sobre *T'* desde *O* al punto de entrada en el hiperboloide de dos hojas, y para las *x'* e *y'*, los semi-diámetros elegidos de la elipse, es decir, las distancias de *O* al punto donde entran los ejes al otro hiperboloide.

Ahora, finalmente, vamos a entrar al estudio del caso de cuatro ejes, para el cual no se puede hacer ya representación gráfica.

Por extensión, una vez que se ha hecho entrar el cuarto eje que faltaba, que es el *Z*, el cono de luz se transformará en un espacio cónico, es decir, que gozará de las propiedades del cono. La ecuación de ese espacio será

$$t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0.$$

Los hiperboloides se transformarán en espacios hiperbólicos. Tal entidad, como la anterior, es una abstracción completa: es simplemente una ecuación en la cual figuran cuatro coordenadas, que tiene la misma forma de la del hiperboloide. Esos espacios están dados por las ecuaciones:

$$t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1$$
$$t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = -1.$$

Las unidades a emplear serán las distancias, sobre los ejes, desde el origen a esos espacios hiperbólicos. Para hacer la transformación de ejes coordenados tenemos — una vez elegido como eje de los tiempos la recta que pasa por el acontecimiento dado, para llevar la partícula que hace la trayectoria al reposo, — tenemos que hacer girar el espacio *X Y Z* de un ángulo igual al que forma *T'* con *T* alrededor de un plano perpendicular a *T'*. El nuevo espacio *X' Y' Z'* cortará el espacio hiperbólico según un elipsoide que será una esfera en las nuevas unidades. Tomando tres semidiámetros conjugados cualesquiera de ese sólido tendríamos *X*, *Y* y *Z*, y las nuevas unidades de longitud serán las magnitudes de dichos semidiámetros. La unidad de tiempo será la distancia, sobre *T'* desde *O* al espacio hiperbólico de dos hojas.

Es necesario un poco de actividad mental para seguir esta explicación, pero es una cosa que no se puede expresar de otra manera. Es una simple extensión, completamente abstracta, de conceptos geométricos, para poder manejar cuatro ejes que no se pueden figurar en el espacio.

Finalmente, para terminar, voy a decir dos palabras solamente sobre la modificación que habría que hacer en la figura 13 para pasar de la mecánica de la relatividad que estamos estudiando, a la newtoniana.

En la mecánica clásica los fenómenos se estudian de una manera tal, que equivale a admitir que la luz se propaga con una velocidad infinita. No se habla de la luz: pero se habla de la simultaneidad en una forma absoluta, que equivale a suponer que uno podría guiarse por ella para el estudio de los fenómenos, como en la teoría de Einstein, a condición de que se propagara instantáneamente. En estas condiciones, las dos rectas a 45° se abrirán y caerán sobre el eje de las x. Entonces, los ángulos del pasado y del futuro valen cada uno 180° y los indeterminados se reducen a cero, resultando que todos los vectores, tanto los temporales como los espaciales, se reducen a vectores temporales, simplemente. En la mecánica newtoniana se puede hacer de manera que el espacio se anule, montando un sistema de ejes sobre la partícula, de tal modo que esta recorra solamente una trayectoria en el tiempo. No se puede, en cambio, operar a la inversa; no se puede, dados dos acontecimientos separados en espacio y en tiempo, encontrar un sistema que anule éste, consiguiendo que los acontecimientos estén solamente separados en el espacio, o lo que es lo mismo, creando un vector espacial.

Esta es la diferencia, en este punto, entre la mecánica de Newton y la de Einstein; como vemos, es fundamental.

LECCIÓN V

SUMARIO: **Equivalencia entre la gravedad y la inercia. — Principio de la relatividad generalizada. — El tiempo y la distancia en un sistema acelerado. — Líneas del mundo.**

Terminada la parte referente a la teoría de la relatividad restringida que nos proponíamos dar, entramos hoy en la segunda etapa, la más amplia, la más perfecta, constituída por la teoría de la relatividad generalizada.

En la primera parte de la doctrina, no se trataba más que de movimientos uniformes, es decir, que los ejes de los cuales tratábamos, estaban únicamente animados de movimiento de esa naturaleza; los otros más generales, los variados, no figuraban. La aceleración, ese fenómeno tan común, puesto que es la consecuencia de la aplicación de una fuerza cualquiera a un cuerpo, no entraba para nada en el cuadro de nuestras fórmulas.

Por otro lado había también un fenómeno general, que está dondequiera, en el Universo—la gravitación,—que tampoco figuraba. La teoría de la relatividad restringida, las fórmulas de esa parte de la doctrina, se aplican exclusivamente a aquellas regiones del universo donde la gravitación no existe, y esas regiones, en realidad no aparecen por ningún lado. Por lo tanto, esa primera parte tenía que ser ya, aunque no se hubiera descubierto la segunda, una simple aproximación.

En esa primera etapa de la teoría figuraban ejes privilegiados y no privilegiados. Los primeros eran aquellos animados de movimiento uniforme, para los cuales las fórmulas eran aplicables. Los otros eran los animados de movimientos más generales, es decir, variados, para los cuales ellas no tenían aplicación posible.

Este hecho de existir ejes privilegiados tenía que repug-

nar a cualquier espíritu amplio, y, especialmente, al de Einstein. Por eso él, no satisfecho con lo que había descubierto, trató de hallar una teoría más general, que pudiera englobar en sí todos los fenómenos y todos los movimientos, y en la cual no pudieran haber ejes que se destinguieran de los demás bajo ningún concepto; todos debían ser igualmente válidos.

Los ejes no privilegiados, los ejes no propios de la teoría restringida, se distinguían porque en ellos se producían ciertos fenómenos que los ponían en evidencia. Por ejemplo, en esos ejes no propios, las leyes de la mecánica clásica no se cumplían. Ahora bien: si se pudiera hacer de manera que el no cumplimiento de estas leyes fuera debido a un fenómeno natural, la causa de la distinción tendría que desaparecer.

La tendencia de Einstein, fué, entonces, tratar de dar una explicación lógica y natural a esos síntomas que denunciaban los ejes no propios.

Recién entramos en la parte donde se necesita estudiar las fuerzas; hasta ahora ellas habían sido dejadas a un lado. La fuerza ejercida por contacto directo, en mecánica, no tenía secreto alguno. Se sabía desde hace mucho tiempo que, cuando un cuerpo comunica a otro una cantidad de movimiento determinado, por contacto, eso se debe a un verdadero bombardeo molecular ejercido a través de la superficie de contacto. Las moléculas de un cuerpo animado de energía que choca con otro, están en movimiento rápido, y entonces, por una serie de impactos infinitivamente pequeños y rápidos, comunica al otro cuerpo, energía. Pero hay fuerzas que no se comunican por contacto directo, y entre ellas está la gravitación.

La gravitación se comunica a distancia, y para eso es necesario suponer que hay un medio entre los dos cuerpos. La gravitación puede suponerse como una propiedad que tienen las masas de formar un cierto ambiente especial a su alrededor, ambiente de tal naturaleza que los cuerpos que entran en él están sometidos a movimientos extraños, distintos de los que siguirían si estuvieran alejados de dichas masas.

La gravitación, que se ha considerado siempre como una fuerza, tiene un carácter muy peculiar, que la hace distinta

de todas las demás de la naturaleza. En efecto, dada una fuerza cualquiera, ella imprime distinta aceleración a los cuerpos, según la masa de ellos. La aceleración será inversamente proporcional a la masa; es decir, que a una masa mayor corresponderá una velocidad menor que adquirirá el cuerpo. La gravedad, en cambio, goza de la propiedad de que todos los cuerpos sometidos a ella poseen una aceleración igual, y eso ya hace suponer que no sea una fuerza general, igual a las demás fuerzas. Cualquiera que sea el cuerpo, está sometido exactamente a las mismas consecuencias, una vez que cae dentro de un campo de gravitación.

Se había observado ya en la mecánica clásica, que la masa de inercia de un cuerpo era igual a la masa pesante. Puede considerarse que un cuerpo tiene dos masas distintas, según se le someta a una fuerza cualquiera o a la gravitación. La masa que se opone a un cambio de movimiento del cuerpo, debido a una fuerza común de la naturaleza, es la que se llama masa de inercia, es la que produce la inercia del cuerpo. En cambio, la masa de ese cuerpo debida a la gravitación, a la resistencia que opone al movimiento que le quiere imprimir la gravedad, es lo que se llama la masa pesante. Se había visto, pues, que esas dos masas eran iguales. En efecto, basta por ejemplo, escribir la fórmula general de fuerza:

$$F = m_i\, a,$$

y escribir de nuevo la misma fórmula, refiriéndose al peso:

$$P = m_p\, g;$$

dividiendo una por la otra, identificando F con P, tendremos que la aceleración es:

$$a = \frac{m_p}{m_i} g.$$

Ahora bien: cómo la aceleración comunicada a todos los cuerpos es la misma, se deduce que este cociente de la masa pesante sobre la masa de inercia, es una constante, y eli-

giendo un sistema de unidades conveniente, esa constante puede ser hecha la unidad.

Este fenómeno de la igualdad de la masa pesante y de la de inercia, tan sencillo, tan razonable como parece, fué, sin embargo, puesto en tela de juicio muchas veces, y se trató de comprobarlo en la forma más perfecta posible.

Especialmente hay que mencionar en éste asunto el experimento de Eötvos. Eötvos, por medio de una balanza de torsión, probó, de una manera científica, que la masa pesante y la masa de inercia, eran iguales. La base del experimento era la siguiente: dada la tierra con su eje de rotación *A B*, un cuerpo cualquiera colocado sobre su superficie — supongamos en *M*, — está sometido a dos fuerzas distintas: la de gravitación *G*, que tiende a arrastrarlo hacia el centro de la tierra, y la fuerza centrífuga *C*, que no está en la misma dirección que la primera, sino que es normal al

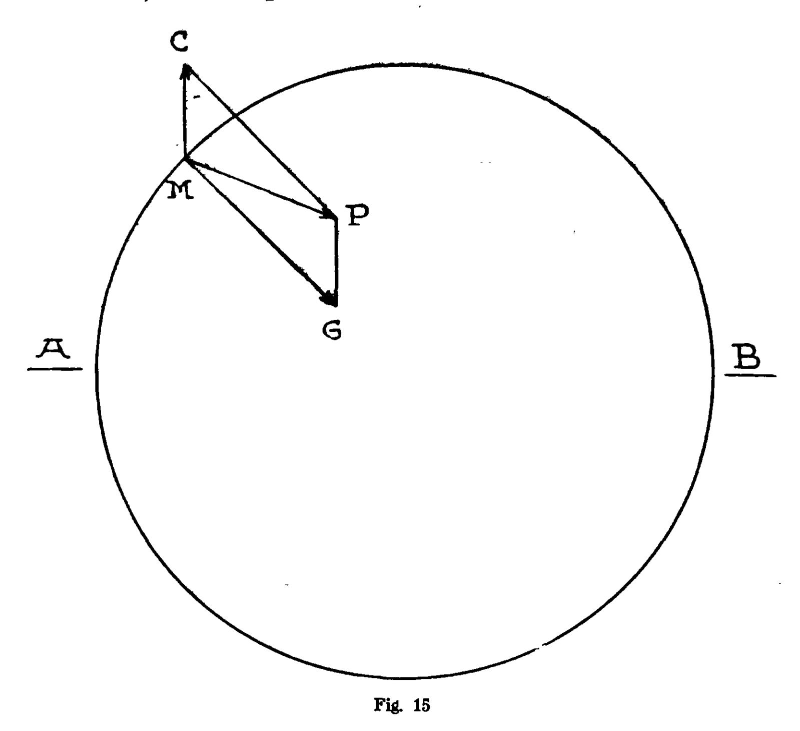


Fig. 15

eje de rotación· El peso del cuerpo que nosotros consideramos comunmente, no es más que un peso ficticio *P*, resultante de las dos fuerzan mencionadas; éste es el peso que se mide en las balanzas: la resultante de la gravedad y de la fuerza centrífuga, que son dos fuerzas no colocadas en la misma línea.

Ahora bien, Eötvos empleaba su balanza de torsión que es una varilla *A B*, suspendida del punto medio por un hilo

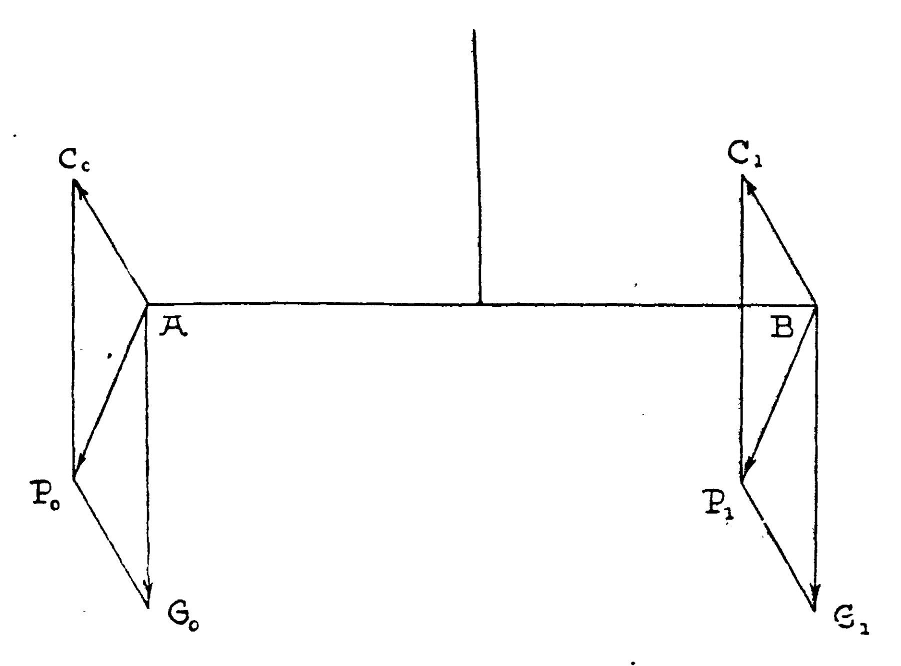


Fig. 16

dc platino, colgando en sus extremos dos pesos iguales de distintas sustancias. Estos dos pesos P_0 y P_1 venían a ser, según hemos dicho, las resultantes de la fuerza centrífuga y de la gravedad.

Ahora bien, si la fuerza centrífuga era siempre proporcional a la gravedad, o lo que es lo mismo, si la masa de inercia era igual a la masa pesante, las resultantes P_0 y P_1 tendrían que ser dos fuerzas coplanares; esas dos fuerzas se

compondrían en una sola, que sería perfectamente equilibrada por la extensión del hilo, sin torsión de ninguna especie. Pero si la masa de inercia no era exactamente igual a la pesante, las fuerzas P_0 y P_1 serían no coplanares, y ellas se compondrían en una resultante y un par. Ese par trataría de hacer girar la balanza alrededor de su punto medio.

Supongamos que el par existiera, y que la balanza hubiera girado un ángulo pequeño, de tal manera que la torsión del hilo lo equilibrara; si la balanza estaba en la dirección Este - Oeste, y se hiciera girar 180°, resultaría que el par invertiría su sentido y trataría de hacer girar la varilla en sentido contrario. De modo que se debía apreciar un cierto ángulo de giro de la balanza con respecto a la caja del instrumento, por ejemplo. Para apreciar ese ángulo de rotación, se disponía de un sistema de espejos, uno fijo en la balanza y otro fijo en la caja, y por ese medio se apreciaba si aquella sufría una cierta rotación alrededor de un eje vertical, al girar 180° el aparato.

No se pudo obtener absolutamente nada de este experimento. Una vez hecho el giro, no se observó torsión de ninguna especie, y en consecuencia se dedujo de allí que la fuerza centrífuga y la gravedad eran proporcionales; siendo una producida por la masa de inercia, la otra por la pesante, eso demostraba la igualdad de las dos masas, como hemos dicho.

Este fenómeno, que había sido ya admitido en la mecánica newtoniana, se consideraba una coincidencia, no sirviendo, por lo tanto, para deducir de él nada útil. Pero habiendo llamado la atención de Einstein esa igualdad, y no creyendo que fuese una mera coincidencia, dedujo simplemente de allí su principio de la relatividad generalizada. El principio de la relatividad restringida surgió del experimento de Michelson y Morley; el de la generalizada salió de la constatación de la igualdad de las masas de inercia y pesante de los cuerpos. Se arrancó de esa igualdad para decir que la inercia y la gravitación podían ser dos aspectos de la misma cosa, que podían ser equivalentes. Para aclarar más aún esto vamos a describir el ejemplo citado por el mismo Einstein.

Einstein imagina una gran jaula en forma de pieza, que estuviera ubicada a una distancia infinitamente grande de cualquier masa gravitante. En esa pieza, colocado un observador, no puede descubrir efecto alguno de gravitación, y por lo tanto constata que en ella se cumplen rigurosamente los principios de la mecánica newtoniana: un cuerpo abandonado, o está en reposo o en movimiento rectilíneo y uniforme, etc. Ahora, supongamos que, por medio de una cuerda, se tira del techo de esa caja, imprimiéndole un movimiento en la dirección del piso al techo, de manera que empiece a marchar en el espacio con un movimiento uniformemente acelerado; los cuerpos mantendrán su movimiento uniforme o su estado de reposo, y tomarán, con respecto a la caja, un movimiento acelerado. En realidad es la caja la que tiene el movimiento acelerado, y los cuerpos están en reposo; pero para el observador que está adentro, los cuerpos tomarán movimiento acelerado desde el techo hacia el piso, exactamente como sucedería en un sistema sujeto a gravitación. De modo que empezarán a cumplirse, dentro de esa pieza, todos los fenómenos producidos por la gravedad. Un objeto suspendido del techo por una cuerda, quedará inmóvil, y la cuerda estará sujeta a una cierta tensión. El observador que está adentro creerá que esa tensión es debida a la gravedad, pero uno que estuviera afuera, vería en cambio que la caja es la que se mueve con un movimiento acelerado, y dirá: lo que sucede es que el cuerpo suspendido trata de conservar su estado de reposo, resistiéndose al movimiento que se le quiera imprimir, y entonces la tensión de la cuerda tiene por causa el oponerse a la inercia del cuerpo. Vemos que el observador interior, que no tiene más propiedad que estar sometido a una aceleración, encuentra todos los fenómenos que produce la gravedad, y si él no puede fijar puntos de referencia, supondrá con toda razón que está en un campo de gravitación.

Se ve por lo tanto que, en un sistema no sujeto a gravitación, por medio de un movimiento adecuado, viene a formarse un campo de gravitación artificial, que posee todos los caracteres de uno natural. Por lo contrario, en un sis-

tema sometido a gravitación, puede hacerse de manera que el campo se anule, por medio, también, de un movimiento conveniente.

Supongamos un ascensor que baje con una aceleración igual a la que imprime la Tierra a todos los cuerpos, es decir con una aceleración igual a 9m. 81 por segundo por segundo. Ahora bien, en ese ascensor, como los cuerpos no pueden caer más ligero de lo que él ya cae, estarán, en reposo o en movimiento uniforme. Esto quiere decir que, dentro del ascensor, desaparecerán todos los fenómenos debidos a la gravedad. Es la anulación de un campo de gravitación real, debido a un movimiento conveniente. Así, los fenómenos de inercia y de gravitación son completamente equivalentes y confundibles.

Debemos hacer notar aquí que esa anulación de un campo de gravitación por medio de un movimiento adecuado, no es completa, sino parcial. Para un observador que cae hacia la Tierra con un movimiento libre, los efectos de la gravedad se anulan dentro de su sistema; pero para puntos alejados de él, no sólo no se anulan, sino que se aumentan. El observador, si bien alrededor de él no siente los efectos de la gravedad, en los puntos que están del lado opuesto de la Tierra con respecto a él, observará una gravitación doble de la que debería existir. Los cuerpos en esas regiones caen hacia él con una aceleración doble. La anulación, como dijimos, es local, dentro del sistema, y no para puntos alejados, lo cual no quita nada, por otra parte, a la generalidad del razonamiento.

Así pues, vemos que los fenómenos debidos a un movimiento acelerado, fenómenos que podían hacer distinguir el sistema dotado de tal movimiento de otro que lo tuviera uniforme, y hacerlo denominar impropio, pueden ser atribuídos a una causa natural como es la gravitación.

Lo mismo sucede con la fuerza centrífuga. Se ha dicho muchas veces que la fuerza centrífuga es una fuerza artificial, no real. En efecto, la fuerza centrífuga de que está poseída una persona, por ejemplo, que gira con la Tierra, para un observador colocado fuera de ella, no existe, pues él

comprenderá que ella es debida a la elección de un sistema de ejes impropio, porque está animado de aceleración. Sin embargo, ya llegados a un punto de vista general, esa fuerza podría confundirse perfectamente con una gravitación de un tipo especial: una gravitación de adentro para afuera, que siguiera leyes particulares.

Supongamos un observador colocado sobre un planeta, sobre Júpiter, por ejemplo, que está siempre rodeado de nubes, el cual no pudiera, por la observación de un punto de referencia fuera de su sistema, saber que el planeta donde se halla está sometido a una rotación. Ese observador podría suponer que la fuerza centrífuga es debida a una rotación, como que lo es a una gravitación de un tipo especial. En consecuencia, vemos que esa fuerza centrífuga es, no ficticia, como se creía, sino hasta cierto punto, tan real como la gravitación; porque el hecho de que esa fuerza se anula para un observador ubicado fuera del sistema, no quiere decir que es ficticia, puesto que la gravedad, que es real, también se anula para un observador en condiciones determinadas.

En esa forma, pues, pudiéndose atribuir estos fenómenos peculiares de sistemas animados de movimientos variados, que hacían de manera que juzgáramos que esos sistemas no eran propios, pudiéndose atribuir, repito, a una causa natural, resulta que ya no existen más ejes privilegiados. Todos los sistemas de ejes son igualmente válidos para la expresión de las leyes de la naturaleza.

Esto que acabo de decir en una simple frase, es el principio de la relatividad generalizada. El dice que todos los sistemas son igualmente válidos para la enunciación de las leyes de la naturaleza, o, de otra manera más clara, que no se puede distinguir por observaciones hechas dentro de un sistema de ejes coordenados, si él está en movimiento uniforme o variado.

Es natural que este principio que nos permite la adopción de un sistema de ejes cualquiera, tiene que hacer variar las leyes de la mecánica. Los principios de la mecánica clásica, formulados para sistemas de ejes en movimiento uniforme unos con respecto a otros, no podrán ser enunciados

de la misma manera una vez adoptado el principio de la relatividad generalizada. Habrá que buscar una nueva enunciación de esas leyes, que veremos dentro de poco.

Ahora cabe preguntar, llegados a este campo más amplio: ¿qué queda de la teoría de la relatividad restringida? Todo el esfuerzo que hicimos para comprender aquella parte de la doctrina, ¿habrá sido inútil? Las fórmulas estudiadas, ¿ya no servirán más?

Sabemos que esa teoría se había hecho en la suposición de la ausencia de todo campo de gravitación y de todo movimiento variado. Es natural que, donde el campo de gravitación sea débil y donde el movimiento sea poco diferente del uniforme, las fórmulas de la teoría de la relatividad restringida tendrán aplicación, y sus resultados serán tanto más aproximados, cuanto más débiles sean los efectos. Por ejemplo, en la Tierra, donde el campo de gravitación es débil, para ciertos fenómenos sobre los cuales no tiene una influencia notable, como por ejemplo, la trasmisión de un rayo luminoso, las fórmulas de la relatividad restringida pueden ser aplicables con un grado de aproximación suficientemente satisfactorio. En cambio, para fenómenos como el de la aceleración, en los cuales se hace sentir de una manera importante, ya esas fórmulas no tienen aplicación.

Vamos a ver ahora cuál es el concepto de la distancia y del tiempo en un sistema de ejes general, es decir, en un sistema sometido a un movimiento variado cualquiera. Es el mismo estudio que hicimos para los sistemas de ejes en movimiento uniforme, aplicado a uno que posea movimiento variado, es decir, que está sometido a aceleración o gravitación.

Analicemos el caso clásico de un disco horizontal que girara con movimiento circular uniforme, estando por lo tanto, sometido a aceleración. Supongamos un observador sobre ese plato, que quisiera hacer medidas de distancia y de tiempo. Para una persona ubicada en el exterior, según que el observador del disco coloque su unidad de medida en dirección paralela al movimiento, es decir, tangencial, o en dirección normal a él, es decir, radial, esa unidad sufrirá una

contracción o no, puesto que estará animada de un movimiento en la dirección de su longitud, o de uno normal a ella. Así que para el observador colocado afuera, toda unidad de medida del que está en el plato, colocada en dirección tangencial, sufrirá un acortamiento, que será tanto mayor cuanto más se separe dicha unidad de medida del centro. En cambio las medidas en dirección radical no tendrán acortamiento de ninguna especie.

Lo mismo sucede con el tiempo. Un reloj colocado en el centro del disco, como está inmóvil, no sufrirá variaciones en su ritmo. En cambio, si lo separamos de él, debido a la velocidad que adquiera, el tiempo se alarga, es decir, el reloj marchará más lentamente.

En consecuencia, vemos que tanto la distancia como el tiempo, en un sistema sometido a gravitación, o lo que es lo mismo, en un sistema acelerado, son variables de un punto a otro del sistema. En este caso la variación no es ya, como en la teoría de la relatividad restringida. de un sistema de ejes a otro, pero conservando la constancia, ambas cosas, dentro de un mismo sistema. Aquí los puntos distintos de un mismo sistema tienen distancias y tiempos diferentes. Según la frase conocida de Einstein, "longitud y tiempo pierden así su último carácter de objetividad física", se transforman en entes variables, fluctuantes, que no tienen mérito ni valor de ninguna especie.

Tenemos que dar aquí la definición de *punto del mundo* y de *línea del mundo,* términos adoptados por Minkoswki en su geometria tetradimensional. Minkoswki llama *punto del mundo* a lo que denominamos, en la lección anterior, *acontecimiento,* es decir, un punto del espacio en un instante determinado.

Ahora bien: si suponemos que ese punto sea una partícula que esté animada de movimiento, podemos formar mentalmente una línea que tenga por proyecciones diferenciales, las diferenciales de las cuatro coordenadas de la partícula, es decir, dx, dy, dz, dt. Esa línea de cuatro proyecciones, o sea, en un sistema de cuatro coordenadas, es lo que se llama *línea del mundo.* Viene a ser, de una manera gráfica, la his-

toria de la partícula, su movimiento de acuerdo con el tiempo, su movimiento en el mundo tetradimensional.

Esa línea del mundo era recta en la teoría de la relatividad restringida, donde los cuerpos estaban animados de movimiento rectilíneo y uniforme. Es claro que todo esto es un simbolismo: se dice que era una línea recta porque la relación entre sus coordenadas es lineal. En efecto, la variación en el tiempo, para un movimiento rectilíneo y uniforme, es proporcional a la variación de las coordenadas espaciales. Las variaciones de las cuatro coordenadas son todas cantidades proporcionales; entonces, se puede decir que la línea del mundo es recta.

Ahora, tratándose de movimiento variado, la línea del mundo será curva. Basta que el movimiento sea variado, aunque la trayectoria espacial sea recta, para que la línea del mundo resulte curva, porque no debemos olvidar que siendo un movimiento rectilíneo pero variado, el tiempo no varía como las coordenadas de espacio y resulta en consecuencia una línea del mundo curva.

Llámase *línea del mundo natural*, la que describe una partícula no sometida a esfuerzo extraño alguno. Conste que en la teoría de la relatividad no se supone una influencia extraña la gravitación, sino un fenómeno natural. La línea del mundo natural, en la teoría de la relatividad restringida, era pues una recta, que seguía la partícula no influenciada por ningún factor externo, y describiendo por lo tanto movimiento uniforme o estando en reposo.

La línea del mundo natural en la teoría de la relatividad generalizada, donde existe la gravitación, será curva, porque sabemos que la gravitación comunica a los cuerpos movimientos variados.

Ahora bien, ¿qué relación podrá tener la gravitación, para un observador, con la línea del mundo que él mismo describe? En la teoría de la relatividad restringida, donde sabemos que toda partícula libre, todo obseravdor libre, debe tener un movimiento rectilíneo y uniforme, podíamos decir que el observador que sigue una línea del mundo recta, no siente campo de fuerza alguno. Ese sería un principio, pero

para la teoría de la relatividad restringida. Ahora, en la teoría generalizada, las líneas del mundo son curvas, pero existe, como hemos dicho, la línea del mundo natural, que es la que describe una partícula no sometida a fuerza agena.

Podemos enunciar el principio siguiente: toda partícula que sigue su línea del mundo natural, no sentirá campo de fuerza alguno. Recordemos el caso del ascensor que bajaba con un movimiento igual al que le imprimiría la gravedad de la Tierra, y recordemos también que el observador colocado dentro de él no sentía dicha gravedad, no sentía fuerza alguna. Así que un observador que siga su línea del mundo natural, es decir, caiga libremente, obedeciendo a la acción de las masas gravitantes, no sentirá fuerza de ninguna especie. Se puede creer en reposo en un sistema sin gravitación.

Decíamos que las leyes de la mecánica clásica tenían que enunciarse de manera distinta para ponerse de acuerdo con el principio de la relatividad. Ahora ha llegado el momento de poder formular la nueva ley de inercia.

La ley de inercia de la mecánica newtoniana decía que todo cuerpo no sometido a fuerza extraña estará en reposo o en movimiento uniforme. La nueva ley, que incluye la gravitación, es tan simple y clara que no necesita explicaciones. Dice: toda partícula no sometida a esfuerzos extraños, seguirá su línea del mundo natural; caerá como debe caer, debido a la gravedad.

Tenemos ahora que volver a tratar un punto del cual ya hemos hablado en la teoría de la relatividad restringida.

En esa parte de la doctrina, pudimos escribir una fórmula no diferencial del intervalo, porque siendo los movimientos rectilíneos y uniformes, se podía aplicar una fórmula integral. La fórmula diferencial sería igual a la integral. Pero ahora, tratándose de partículas sometidas a gravitación, tratándose de líneas del mundo curvas, es necesario hacer esa fórmula diferencial para que tenga valor.

La nueva fórmula del intervalo, será pues:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Ahora, si queremos hallar el intervalo total de una partícula que hace un recorrido cualquiera, no tendremos más que aplicar esta fórmula diferencial y efectuar la integral correspondiente, es decir, hallaremos todos los intervalos infinitamente pequeños, y su suma, que será la integral, dará el intervalo total entre los dos acontecimientos inicial y final, siguiendo la curva que ha descrito la partícula.

Ese intervalo diferencial goza de la misma propiedad, y por las mismas razones, del intervalo de la teoría de la relatividad restringida, es decir, de ser una invariante. Habiendo una partícula descrito una trayectoria, el intervalo diferencial es el mismo, a pesar de que cambie el observador, es decir, el sistema de ejes coordenados, y lo mismo sucede con el intervalo integral.

Pero actualmente aceptamos que las partículas pueden describir diversos caminos, pueden describir la línea del mundo natural u otra cualquiera.

Conviene hacer una aclaración a ese respecto. Se dice que el intervalo es una invariante en el sentido de que ese intervalo, para la trayectoria de una partícula, descrita en cierta forma determinada, tiene el mismo valor para un observador o para otro. Pero si admitimos que la partícula pueda hacer la trayectoria de dos maneras distintas, es natural que el intervalo total variará. Para cada recorrido de la partícula entre los dos acontecimientos, habrá un intervalo distinto; pero para cada trayectoria ese intervalo tendrá el mismo valor, para cualquier observador. Es una invariante, una vez que se fija una trayectoria determinada.

Ya digo que pueden existir distintas trayectorias — es claro que hay una sola que es natural, la línea del mundo natural, — hemos llegado al momento de demostrar que el intervalo para la línea del mundo natural es mayor que el que corresponde a cualquier otra trayectoria. En efecto, sabemos que para la trasmisión de un rayo luminoso, el intervalo es nulo. Así que se puede siempre encontrar intervalos menores que uno dado, puesto que hay uno nulo, el de la luz. Los de los cuerpos en movimiento con velocidades próximas a la de la luz serán infinitamente pequeños.

En cambio hay un intervalo máximo, que es el que se produce cuando las tres diferenciales de espacio se anulan y queda solamente la diferencial del tiempo, porque indudablemente no se puede obtener ningún intervalo mayor que ese en que se anulan los tres términos negativos y subsiste solamente el positivo. Así que entre todas las trayectorias que puede seguir una partícula para ir de un acontecimiento a otro, hay una que produce el intervalo máximo, y es natural que ella tenga propiedades especiales.

Se dice y se acepta que ese intervalo máximo corresponde a la línea del mundo natural de la partícula, es decir, que es el referente a la trayectoria que describe la partícula cuando se le deja en libertad.

Extrañará que ese intervalo — que hemos comparado con una distancia, — sea máximo y no mínimo, porque sabemos que distancias entre dos puntos hay varias, pero una sola mínima, que es la medida en línea recta; pero si recordamos que hemos cambiado — con el objeto de que no resultara imaginario el valor del intervalo, — los signos de la fórmula, comprenderemos que el que ahora llamamos máximo, es mínimo, en realidad.

Teniendo en cuenta la analogía del intervalo con una distancia entre dos puntos, y viendo que la línea que mide la distancia mínima — que resulta máxima — es curva, nos vendrán a la memoria las distancias medidas sobre una superficie gausa. Sobre una superficie gausa hay, dados dos puntos de ella, muchas líneas que los unen; pero hay una de recorrido mínimo, y esa se llama la geodésica entre los dos puntos. Por analogía se ha llamado la línea del mundo natural, la *geodésica* del mundo tetradimensional. Es el camino más corto que pueden recorrer las partículas.

Como las geodésicas del mundo tetradimensional son curvas, deducimos que dicho mundo no es euclidiano, no se rige por las reglas de la geometría euclidiana, sino que es un mundo curvo, arqueado, en cuatro dimensiones, que está sujeto a leyes especiales que exigirán la aplicación de una geometría también especial, la cual será el motivo de la próxima disertación.

Vemos pues que el estudio de la mecánica deriva hacia la geometría. Como la mecánica en realidad tuvo su origen en la geometría, parece que diéramos un paso atrás. Tenemos que volver al estudio de las trayectorias, de las curvas, de las propiedades geométricas del Universo. Es un retroceso tal como si, conociendo la ley de atracción universal de Newton — que es una ley mecánica, — volviéramos a las emitidas anteriormente por Kepler, que eran leyes geométricas. Pero este paso atrás es necesario para encauzar de nuevo el estudio por la vía que debemos seguir, de acuerdo con la nueva doctrina. Así que volviendo al estudio de la geometría, entraremos de nuevo en el campo de la mecánica, de acuerdo con las nuevas ideas.

LECCIÓN VI

SUMARIO: Geometrías no euclidianas. — Geometría del mundo tetradimensional. — Fórmula general del intervalo.

Se comprende que para que la geometría aplicada en una región determinada sea euclidiana, es decir, sea la geometría común que nosotros conocemos, es necesario que las unidades de medida no varíen de un lugar a otro dentro de esa región, y que las figuras, en consecuencia, conserven sus formas y dimensiones constantes.

Para aclarar esto existen dos ejemplos: uno dado por el el mismo Eistein, que se refiere a un plano de temperatura variable, y otro debido a Poincaré, que estudia una esfera de temperatura también variable. Como este último ejemplo, por ser en tres dimensiones, es más general, será el único que vamos a desarrollar.

El mundo ideal concebido por Poincaré para explicar la necesidad de la aplicación de una geometría no euclidiana, es una esfera cuya temperatura disminuye del centro hacia la superficie. En esa esfera, una unidad de medida cualquiera, suponiendo que estuviera constituída de una sustancia sensible al calor, tendría distintas dimensiones, según se colocara en un lugar u otro de ella, debido a las diferencias de temperatura. Por esa misma razón, una figura cualquiera, un cubo por ejemplo, cambiaría de forma, dejando de ser un cubo, porque las aristas que estuvieran más distantes del centro serían más cortas, debido a la contracción sufrida por el mayor frío. Las figuras geométricas, entonces, pierden las propiedades que las determinan en la geometría euclidiana. Los planos ya no serían planos, porque suponiéndolos, por ejemplo, de gelatina, las distintas temperaturas en sus diferentes puntos, harían que se dilataran de manera desigual,

tendiendo a arrollarse, y formando, en consecuencia, superficies gausas. Todas las figuras de la geometría euclidiana quedarían, por lo tanto, modificadas sensiblemente, y por consiguiente, en este mundo, sería imposible la aplicación de dicha geometría.

Este ejemplo de tres dimensiones puede extenderse fácilmente al mundo tetradimensional. Para cuatro dimensiones sería exactamente lo mismo: si las medidas, de un lugar a otro, varían, y las figuras cambian de forma, la aplicación de la geometría euclidiana es imposible.

Esto es, justamente, lo que sucede en los sistemas sometidos a aceleración o a gravitación, es decir, en los sistemas que debemos considerar en la teoría de la relatividad generalizada. Hemos visto en la última disertación, que la magnitud de las unidades de medida y de tiempo varían de un punto a otro de un sistema, y en consecuencia, nos hallamos exactamente, para cuatro dimensiones, en el mismo caso que el mundo de tres, de Poincaré. La aplicación de la geometría euclidiana es imposible.

Para aclarar más aún este punto, vamos a dar algunos ejemplos de cosas comunes de la vida diaria.

Veamos primeramente la definición de línea recta. Cuando nosotros tenemos una regla y queremos saber si su filo es completamente recto, ¿que operación hacemos? Ponemos la regla delante de un ojo, y dirigimos una visual que una un extremo del filo con el otro: si todos los puntos intermedios de la arista coinciden con esa visual, decimos que la regla es recta. Esto, como ustedes ven, equivale a comparar el filo de la regla con un rayo luminoso. Ahora bien, en la teoría de la relatividad restringida, los rayos de luz se propagaban en línea recta; en la teoría generalizada ya no sucede eso: los rayos luminosos se encurvan en la proximidad de las masas gravitantes, debido a la misma gravitación. En consecuencia, no siendo ya los rayos de luz, rectos, la definición de recta que hemos empleado, falla por su base.

De la misma manera sucedería con la definición de paralelas. Si identificamos esas rectas, que queremos saber si pue-

den ser o no paralelas, con dos rayos de luz, esos rayos, aunque fueran elegidos cuidadosamente, se desviarían en su camino debido a la proximidad de las masas gravitantes, encurvándose uno más que el otro, porque sus distancias a dichas masas serán distintas; finalmente resultará que esos rayos se encontrarán o dejarán de estar en un mismo plano, es decir, dejarán de ser paralelos. El concepto de paralelismo desaparece y sucede, como veremos más adelante, que no se puede trazar una paralela a una recta por un punto dado. No existen las paralelas de la geometría euclidiana.

Por otro lado, vemos también que las trayectorias de los planetas, los que debemos suponer, según el concepto relativista, como cuerpos completamente libres en el espacio, — puesto que en relatividad se supone que la gravitación no sea un esfuerzo anormal, sino una propiedad instrínseca del espacio, — vemos que esas trayectorias, en lugar de ser líneas rectas, como debería suceder para que se cumpliera el primer principio de la mecánica clásica, son curvas cerradas, elipses, y, en consecuencia, falla por ese lado también, la geometría euclidiana. Más adelante veremos otra falla más, consistente en que en los sistemas acelerados, la relación de la circunsferencia al diámetro no es exactamente igual a π sino que es algo menor.

Quedamos, pues, en que la geometría del mundo tetradimensional en que nosotros vivimos, debido a la presencia de las masas gravitantes, no es euclidiana. Nos vemos, pues, llevados obligatoriamente a dar algunas nociones sobre dicha geometría. En este punto tendré que ser un poco más extenso de lo que desearía, debido al hecho de que en ningún programa universitario figura el estudio de las geometrías no euclidianas, por lo que debo suponer que el auditorio no conoce el asunto.

El origen de la geometría no euclidiana se remonta a varios siglos atrás. Los precursores de ella fueron un jesuíta italiano, el padre Saccheri, y un matemático suizo, Lambert. Estos dos hombres de ciencia, tratando de demostrar el 5.°

postulado de Euclides, que se refiere a las paralelas, echaron, sin darse cuenta de ello, las bases de la nueva geometría.

De los postulados de Euclides, solamente uno había sido puesto en tela de juicio desde la más remota edad. Los mismos matemáticos de la época de aquel genio creyeron que ese postulado era de difícil, sino imposible, demostración, y que, por lo tanto, su veracidad era muy discutible. El quinto postulado de Euclides dice que si dos rectas son cortadas por una tercera, esas rectas se encuentran hacia el lado en que los ángulos alternos-internos son menores. Si los ángulos alternos-internos no son iguales, las rectas no son paralelas; en consecuencia se encuentran del lado en que dichos ángulos son menores. Este postulado es el que trae como consecuencia toda la teoría de las paralelas; así que, poniéndose en duda su veracidad, se ponía también en tela de juicio toda la teoría de las paralelas, y hasta su misma definición.

Como dijimos, tanto Saccheri como Lambert, convencidos de la verdad del quinto postulado, trataron de demostrarlo, y para eso emplearon el método del absurdo. Supusieron que el postulado podía o no ser verdad, es decir, admitieron al lado de él otras dos hipótesis, y trataron, probando el ilogismo de éstas, de demostrar la verdad del quinto postulado. Las hipótesis de Saccheri y Lambert eran — a lo menos en su esencia — las siguientes: primero, que la suma de los tres ángulos de un triángulo vale dos rectos; segundo, que la suma era mayor de dos rectos, y tercero, que era menor. Como se ve, la primera hipótesis corresponde a la geometría euclidiana.

Ahora bien, la hipótesis de que la suma era mayor de dos rectos, ellos creyeron fácil descartarla de inmediato, no así la otra, sobre la cual, muy a pesar suyo, admitieron que se podía fundar una geometría tan coherente y armoniosa como la euclidiana. Es claro que ellos creyeron también posible, a la larga, descartar, por caminos tortuosos, esa tercera hipótesis, y quedaron por lo menos tan convencidos como antes de la verdad del quinto postulado; pero en cambio, sus continuadores y otros matemáticos que imparcial-

mente juzgaron su obra, vieron que en esa hipótesis podría encontrarse la verdad y que ella podía ser el origen de una geometría perfecta. Estos dos hombres de ciencia fueron constructores negativos, es decir que, tratando de probar la euclidiana, vinieron en realidad, a demostrar la posible existencia de otras geometrías.

El primer matemático que realmente trató de construir una geometría sobre bases distintas a las conocidas, fué Gauss. Gauss, durante muchos años de su vida, tal vez durante treinta o cuarenta, estuvo hurgando ese tema, llegando, casi puede decirse, a formar una geometría completa sobre la base de que la suma de los tres ángulos de un triángulo es menor que dos rectos. Sin embargo, este sabio no comunicaba a nadie sus trabajos, no publicándolos ni dando a sus amigos sino vagas noticias de ellos, en sus cartas. Así es que vió, con la pena que es de suponerse, que otros que tuvieron la concepción de la geometría no euclidiana después que él, publicaron antes sus investigaciones. Me refiero al matemático ruso Lobacefski y al húngaro, Bolyai. Los trabajos de Lobacefski y Bolyai, que se dieron a luz casi simultáneamente, al principio del siglo XIX, eran fiel reflejo de la concepción que había tenido Gauss. Así que cuando, en el año 1832, éste, por intermedio del padre de Bolyai, que era su amigo, conoció las investigaciones del joven, las ponderó con una altura de miras que realmente lo honra, escribiéndole que se felicitaba que su hijo hubiera hecho dicho trabajo, que él había concebido mucho antes, pues esto le evitaba la tarea de tener que continuar esa obra.

Vamos a dar una ligera idea de la geometría de Lobacefski - Bolyai, como la llamaremos en lo sucesivo.

En esta geometría, se dice que, dada una recta *A B,* se pueden trazar una infinidad de paralelas a ella por un punto dado, las que están encerradas en un cierto ángulo. El ángulo que forman las paralelas extremas *E F, G H,* con la perpendicular *C D,* se llama *ángulo de paralelismo*; el varía desde 90° cuando el punto *C* está sobre la recta, a 0°, cuando se halla a una distancia infinita de ella; en este caso la paralela puede llegar hasta ser perpendicular.

Las consecuencias de esto son numerosas, pero esta geometría difiere por completo de la de Euclides solamente en aquellos puntos que tienen relación con la teoría de las

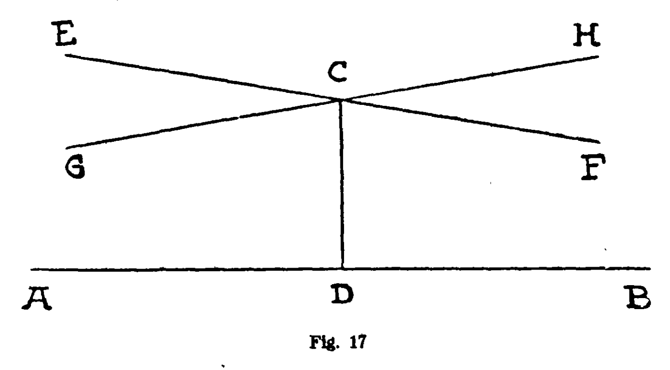


Fig. 17

paralelas. En esta geometría, la suma de los tres ángulos de un triángulo vale menos de dos rectos, como hemos dicho antes, y existen otras series de diferencias que no entramos a enumerar.

En cuanto a la otra hipótesis, que los matemáticos habían descartado siempre, aquella de que la suma ya citada fuera mayor que dos rectos, fué Riemann, el sabio alemán, el que, en el mismo trabajo que hemos mencionado con motivo de la geometría tetradimensional, la tomó en cuenta, sentando las bases de una nueva geometría. En ese mismo informe del año 1854, echó, aunque de manera vaga, los cimientos de esta nueva geometría, y probó que la tercera hipótesis era tan racional como la otra, y que sobre ella se podía edificar una geometría perfectamente coherente y armónica, tal como la euclidiana.

En la geometría de Riemann, que viene a ser, casi puede decirse, contraria a la de Lobacefski - Bolyai, se sienta la teoría de que no se puede trazar una recta paralela a otra desde un punto exterior a ella, es decir, que cualquier otra recta que se trace encontrará la primera. Es la negación de la existencia de las paralelas.

Mucho tiempo después, se vió que las dos geometrías no euclidianas, la de Lobacefski-Bolyai y la de Riemann, po-

dían ser comparadas a la geometría que se obtiene sobre una superficie gausa. Se vió que la primera era igual a la geometría esférica en la cual se había sustituído el radio de la esfera por una cantidad imaginaria, es decir, igual a la geometría sobre una esfera de radio imaginario. Como la concepción de dicha figura geométrica era difícil, se trató de buscar otra superficie que tuviera esa misma propiedad, la que fué llamada *pseudo-esfera.* Es una superficie de revolución, cuya forma es la que muestra la figura.

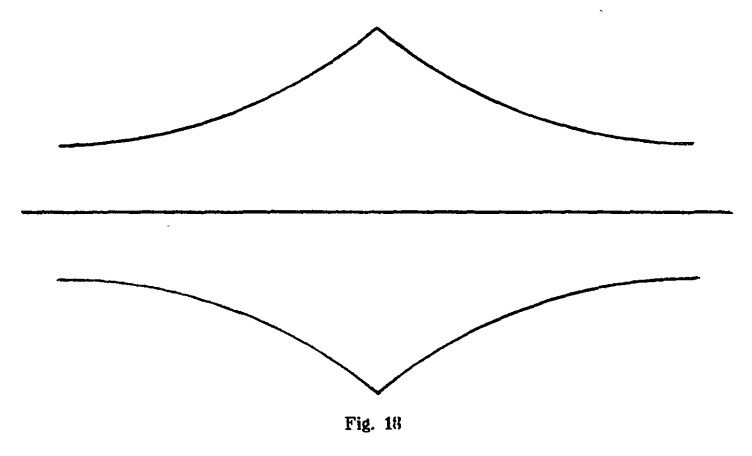


Fig. 18

La pseudo-esfera tiene, pues, la propiedad de que la geometría sobre su superficie, para regiones pequeñas, llamadas *regiones normales,* es exactamente igual a la de Lobacefski-Bolyai. Digo, para regiones pequeñas, porque si se extiende a las grandes, resulta que las geometrías no pueden ser ya comparables.

De la misma manera, se vió que la geometría de Riemann resultaba igual a la esférica: la geometría primitiva de Riemann no es más que la esférica, limitada a regiones pequeñas, y aplicada al plano.

Las geometrías sobre superficies son iguales para superficies de igual curvatura; esto me obliga a recordar lo que se entiende por curvatura de una superficie en un punto dado. Vds. recordarán que se llama curvatura de una

línea en un punto determinado, a la inversa del radio del círculo osculador en ese punto· Ahora, si se trata de una superficie, la definición de curvatura es como sigue: se traza la normal a la superficie en el punto; por esa normal pasa un haz de infinitos planos, los que determinan sobre la superficie un haz de infinitas curvas; de esas curvas hay una que tiene curvatura máxima en el punto y otra, curvatura mínima, las que se encuentran en planos que forman ángulos rectos. El producto de las curvaturas de esas dos líneas es lo que se llama la curvatura de la superficie en ese punto.

Para superficies de curvaturas iguales, según hemos dicho, la geometría es la misma. Quiero decir que la geometría de la esfera, por ejemplo, para una región normal, será igual a la de cualquier otra superficie que tuviera, en ese punto, la misma curvatura. Esto ensancha el horizonte de las geometrías sobre superficies, pues hay muchas que tienen igual curvatura. En efecto, cualquier superficie que se dobla o encurva sin deformarse, tendrá, después de la operación, igual curvatura. Un cono, un cilindro, que se pueden obtener del plano enrollándolo en cierta forma, son superficies que tienen la misma curvatura del plano (nula), y en consecuencia, idéntica geometría. De la misma manera, hay numerosas superficies que tienen la misma curvatura que la esfera y que la pseudo-esfera, y la geometría sobre ellas es igual a la de Riemann y a la de Lobacefski-Bolyai, respectivamente.

Se ha visto que la geometría no euclidiana es la más apropiada para el mundo tetradimensional; podemos añadir ahora que la de Riemann es la que mejor se amolda a las cualidades de ese mundo. Pero la geometría de Riemann que se aplica al mundo tetradimensional no es la que acabamos de describir: es la elíptica, que tiene la siguiente diferencia con la primera, llamada esférica. La geometría esférica se refiere a una superficie que tiene dos caras, es decir, de la cual se pueden definir perfectamente una cara exterior y una interior. En cambio, la elíptica es la misma geometría, pero aplicada a una superficie de una sola cara. Para

obtener el concepto de una superficie de esa clase, vamos a describir la más sencilla, llamada *hoja de Moëbus.* La hoja de Moëbus puede formarse tomando un rectángulo alargado de papel y cerrándolo circularmente para engendrar una superficie cilíndrica; ahora, antes de pegar un borde sobre el otro, gírese uno de ellos 180°, de modo que en dicho extremo la cara interior se haga exterior. En esas condiciones, no se puede distinguir, en la superficie formada, una cara de la otra, porque la que es interior por un lado, viene a ser exterior por el otro. Ahora bien, la geometría elíptica de Riemann, que es una variante de la esférica, tiene las mismas diferencias con ésta, que la hoja de Moëbus con la esfera, en cuanto se refiere al concepto de las caras.

Esta geometría elíptica, que conserva las propiedades fundamentales de la otra, es, como ya hemos dicho, la que se aplica al mundo tetradimensional·

Debemos también admitir otra variante en el estudio geométrico de nuestro universo, que es la siguiente: ya no podemos aplicar las coordenadas cartesianas porque, como ya hemos dicho, las rectas se hacen curvas y los ángulos rectos dejan de serlo. De modo que un sistema de ejes cartesianos no podría servirnos; ¿cuál es el sistema de coordenadas que podemos usar en el mundo tetradimensional? Son las de Gauss.

Estas coordenadas, en un plano por ejemplo, están formadas por una serie de infinitas curvas paralelas (es decir, que no se encuentran), infinitamente próximas entre sí, cruzadas por otra serie de infinitas curvas paralelas, que no tienen relación con las primeras. Se concibe que un punto cualquiera del plano viene a estar determinado por la intersección de dos curvas, una de cada familia, pudiéndose nombrar entonces por la denominación de las dos curvas a que pertenece.

Si se tratara del espacio de tres dimensiones, se emplearían tres familias de superficies gausas, tales que no se encuentren las de una misma familia; cada punto del espa-

cio está determinado por la intersección de tres superficies, una de cada familia.

Ahora, tratándose del mundo tetradimensional, ya, en realidad, no son curvas ni superficies: son cuatro números arbitrarios que se aplican a cada punto del espacio - tiempo, a cada acontecimiento, de tal manera que vienen a constituir sus cuatro coordenadas. Ellas no conservan ya más propiedad que la de que la diferencia entre coordenadas de la misma clase de dos acontecimientos infinitamente próximos, es infinitamente pequeña.

Vamos ahora a insistir de nuevo sobre la noción y la fórmula de intervalo, pero de acuerdo con las nuevas ideas que hemos adquirido. Dijimos en la última disertación que la fórmula del intervalo tenía que ser diferencial en la teoría de la relatividad generalizada, porque tratándose de líneas del mundo curvas, para que los intervalos pudieran aplicarse estrictamente sobre las líneas, era necesario que fueran diferenciales, y que un intervalo cualquiera se calculara como la integración de todos sus intervalos diferenciales. Con todo, podríamos suponer que la fórmula se mantenía invariable al hacerse diferencial, que fuera la misma hallada en la teoría de la relatvidad restringida. Pero, por ser la geometría del mundo, no euclidiana, resulta que la fórmula aquella del intervalo, aunque la hagamos diferencial, no será aplicable en la teoría generalizada; debemos buscar pues, una nueva, más ámplia, más general, que pueda ajustarse a esta geometría que vamos a emplear.

Para hallar esa nueva fórmula del intervalo, tenemos que empezar otra vez por el caso de un sistema de dos coordenadas. Si tenemos dos puntos sobre un plano, las fórmulas que expresan la distancia entre ellos, son:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$
$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\Theta^2$$
$$ds^2 = d\alpha^2 - 2k\ d\alpha\ d\beta + d\beta^2.$$

En la primera, se han utilizado coordenadas rectangulares; en la segunda, polares, y en la tercera, oblícuas.

Si los dos puntos estuvieran sobre una esfera, se tendría como expresión de su distancia sobre la superficie:

$$ds^2 = d\lambda^2 + \cos^2\lambda \; d\mu^2.$$

Estas fórmulas, como asimismo todas las demás halladas para cualquier superficie, empleando cualquier sistema de coordenadas, se pueden resumir en la siguiente:

$$ds^2 = g_{11}\; dx_1{}^2 + 2g_{12}\; dx_1\; dx_2 + g_{22}{}^2,$$

en la cual x_1, x_2 son las coordenadas y los coeficientes g, llamados *potenciales,* son cantidades constantes o funciones de dichas coordenadas.

Esos potenciales determinan, no sólo la clase de coordenadas que hemos empleado, sino también la superficie sobre la cual se ha medido la distancia. Para el plano, por ejemplo, habrá una cierta relación, una cierta ecuación que se cumplirá entre los potenciales y sus derivadas con respecto a las coordenadas, y que se cumplirá cualquiera que sea el sistema de coordenadas que hayamos utilizado. En cambio, esa condición no se verificará si la distancia es considerada sobre otra superficie; para esta otra superficie habrá una nueva relación.

Para concretar con un ejemplo, vamos a establecer la condición para que la distancia sea medida sobre un plano, y que se llama el *carácter de planeidad*:

$$\frac{\delta}{\delta x_1}\left[\frac{1}{\sqrt{g_{11}\, g_{22} - g_{12}{}^2}}\left(\frac{g_{12}}{g_{11}}\frac{\delta g_{11}}{\delta x_2} - \frac{\delta g_{22}}{\delta x_1}\right)\right]$$
$$+ \frac{\delta}{\delta x_2}\left[\frac{1}{\sqrt{g_{11}\, g_{22} - g_{12}{}^2}}\left(2\frac{\delta g_{12}}{\delta x_1} - \frac{\delta g_{11}}{\delta x_2} - \frac{g_{12}}{g_{11}}\frac{\delta g_{11}}{\delta x_1}\right)\right] = 0.$$

Como se ve, esta fórmula, muy complicada, no encierra más que los potenciales y sus derivadas con respecto a las coordenadas. Ella expresa simplemente que la curvatura de que hablamos antes, de la superficie sobre la cual se mide el intervalo, es nula.

Ahora, se comprende, que si ella no fuera nula, sino que tuviera un cierto valor, éste valor nos daría una idea de la clase de superficie de que se trata. Por eso decíamos que los potenciales determinaban la clase de superficie con que trabajamos.

Para aclarar esto, vamos a dar un ejemplo muy simple. Si tomamos cuatro puntos sobre un plano, obtenemos seis distancias mutuas entre ellos. Cinco de esas distancias determinan la posición de los cuatro puntos: queda la sexta. Esa sexta distancia es, pues, fija para que los cuatro puntos coexistan sobre el plano. Si dicha distancia no fuera la que debe ser, resultaría que los cuatro puntos no estarían sobre un plano; estarían sobre una superficie gausa, e indudablemente habría una serie de superficies que responderían a un valor cualquiera de ella.

Pasando ahora al caso de tres dimensiones, la fórmula del intervalo sería:

$$ds^2 = g_{11}\, dx_1^2 + g_{22}\, dx_2^2 + g_{33}\, dx_3^2 + 2\,g_{12}\, dx_1\, dx_2 + 2g_{13}\, dx_1\, dx_3 + 2\,g_{23}\, dx_2\, dx_3.$$

Como se ve, es la misma fórmula indicada para dos dimenciones, pero ampliada a tres. Esta expresión, en lugar de tener como la anterior, tres términos, ya tiene seis.

Se comprende que los potenciales de esta ecuación, qué son, como anteriormente, constantes o funciones de las coordenadas, deban llenar también ciertas condiciones, para que la distancia haya sido medida en un espacio euclidiano. Para aclarar eso, vamos a dar otro ejemplo con puntos. Si se toman cuatro cualesquiera en el espacio, ellos pueden colocarse siempre de modo qué sus seis distancias mutuas sean números determinados; luego, en cualquier caso, podemos decir que están en un espacio euclidiano. Pero si se toma un quinto punto, éste está determinado por tres distancias a tres de los cuatro puntos primitivos; en consecuencia, la distancia al cuarto punto está fijada, y debe tener un valor especial para que los cinco puntos puedan considerarse en un espacio euclidiano. Si

esa distancia fuera distinta de la que determinan los demás datos, los cinco puntos podrían coexistir, pero la región en que se encontrarían sería no euclidiana, es decir, estaría regida por una geometría no euclidiana.

Esto es lo que sucede con la fórmula del intervalo. Si los potenciales de ella se someten a una cierta condición, el espacio a que se refiere será euclidiano; si no, resultará que no lo es, y estará regido por una geometría especial. Esa condición, llamada también por extensión, de planeidad, se compondrá ahora de seis ecuaciones que deberán anularse simultáneamente.

Vamos a pasar finalmente al caso de cuatro dimensiones. Escribiremos la fórmula del intervalo, deduciéndola de las anteriores:

$$ds^2 = g_{11}\ dx_1^2 + g_{22}\ dx_2^2 + g_{33}\ dx_3^2 + g_{44}\ dx_4^2 + 2g_{12}\ dx_1\ dx_2 + 2g_{13}\ dx_1\ dx_3 + 2g_{14}\ dx_1\ dx_4 + 2g_{23}\ dx_2\ dx_3 + 2g_{24}\ dx_2\ dx_4 + 2g_{34}\ dx_3\ dx_4.$$

Esta fórmula tiene diez términos y por lo tanto diez potenciales. Estos potenciales deben responder a ciertas condiciones para que el espacio de cuatro dimensiones, a que se refiere la fórmula, sea euclidiano: pero ahora el número de ecuaciones aumenta, y su complicación también. Las relaciones a que deben someterse los potenciales son ahora veinte: es necesario que veinte expresiones que encierran los potenciales y sus derivadas con respecto a las coordenadas, se anulen simultáneamente, para que el continuo de cuatro dimensiones sea euclidiano.

El hallazgo de estas fórmulas corresponde al cálculo diferencial absoluto o cálculo tensorial, perfeccionado, como sabemos, por los matemáticos italianos Ricci y Levi - Civita, sobre los trabajos de Christoffel.

Ahora bien, si esas veinte relaciones entre los potenciales y sus derivadas no coexisten, resultará que el espacio tetradimensional a que se refiere la fórmula, no será euclidiano. Eso es lo que sucede generalmente en nuestro mundo. Pero entonces, podremos establecer otras relaciones, siempre

entre los potenciales y sus derivadas, que podrán indicarnos las características del espacio - tiempo, es decir, del mundo tetradimensional en que vivimos.

Se ha podido llegar a encontrar ese grupo de fórmulas más generales: es un grupo de expresiones que se anulan simultáneamente para un acontecimiento cualquiera de nuestro espacio - tiempo, y que comprenden, como caso particular, el carácter de la planeidad de que hemos hablado antes, puesto que en regiones infinitamente alejadas de las masas gravitantes, el Universo se hace euclidiano; de modo que esas fórmulas más generales deben comprender como un caso particular las propiedades euclidianas.

Ese grupo de fórmulas que caracterizan el mundo tetradimensional constituyen, justamente, la nueva ley de gravitación de Einstein. Es decir, que la nueva ley de gravitación, cuyo estudio será el motivo de la lección siguiente, no es más que un grupo de ecuaciones tales que determinan las relaciones que deben existir entre los potenciales de la fórmula del intervalo, para que dicha fórmula se refiera a un punto cualquiera del mundo tetradimensional.

LECCIÓN VII

SUMARIO: **Masa, energía. — La nueva ley de gravedad. — Estudio de un caso particular. — El universo de Einstein.**

Ha llegado el momento ahora, de pagar una pequeña deuda: me refiero a la explicación de por qué, según la teoría de la relatividad, la masa de un cuerpo resulta variable de acuerdo con su velocidad, o, en forma más general, de acuerdo con la energía que posee. Esta explicación, como ya lo dijimos, podría haberse dado durante el estudio de la teoría restringida, pero la postergamos para ahora con el objeto de que, al hacerla, se tuvieran conocimientos mayores.

Existe una ley en la mecánica clásica llamada *de conservación de la cantidad de movimiento,* que dice que, si las cantidades de movimiento de dos cuerpos sufren cierta variación, a causa, por ejemplo, de un choque que se produzca entre ellos, la suma total de la cantidad de movimiento antes y después del fenómeno, será la misma, es decir que la suma de las cantidades de movimiento de los dos cuerpos después del impacto, será la misma que antes de él.

Esta ley, no sólo no está reñida con la teoría de Einstein, sino que ella se deduce también de las fórmulas de la relatividad.

Pero, para que, en la nueva doctrina, la ley se cumpla de una manera rigurosa, debemos hacer una pequeña modificación. La cantidad de movimiento en la mecánica clásica estaba dada por la expresión:

$$mv = m\frac{dx}{dt}.$$

Ahora bien, debido a la intervención de esa cantidad dt, resulta que, como ella es apreciada de manera distinta

por dos observadores diferentes, si empleamos la misma expresión en la teoría de la relatividad, la ley de conservación de la cantidad de movimiento no se cumple. Para que ello suceda, es necesario sustituir el intervalo de tiempo dt por el intervalo propiamente dicho ds. De modo que, para que la ley sea verdadera, de acuerdo con la nueva doctrina, es necesario escribir la expresión de la cantidad de movimiento en la forma siguiente:

$$m \frac{dx}{ds}. \qquad (1)$$

Este cambio no debe alarmarnos. En general el intervalo es muy poco diferente del intervalo de tiempo, por la sencilla razón de que, de acuerdo con las unidades que hemos adoptado, el espacio recorrido por un móvil es muy pequeño con respecto al tiempo empleado en recorrerlo. Así que, en los casos corrientes ds y dt difieren en una cantidad muy pequeña.

Empleando, pues, la expresión de la cantidad de movimiento en esta forma modificada, la ley de conservación se cumple.

Si tratamos ahora, de que aparezca de nuevo en la (1), la velocidad, tendremos que transformar dicha expresión de la manera siguiente:

$$m \frac{dx}{ds} = m \frac{dt}{ds} \frac{dx}{dt}.$$

En esta forma, la cantidad de movimiento aparece como el producto de una masa variable $m \frac{dt}{ds}$, multiplicada por la velocidad.

Vamos a hallar el valor de $\frac{dt}{ds}$. Para esto, escribimos de nuevo la fórmula del intervalo:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Podemos escribir la fórmula correspondiente a la teoría de la relatividad restringida, en vista de que el fenómeno que tratamos de probar se observa ya en aquella doctrina, gozando dicha fórmula, de la ventaja de ser más sencilla que la otra. Tendremos, pues:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 1 - \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right].$$

La expresión dentro de barras es la suma de los cuadrados de las tres proyecciones de la velocidad, que es igual al cuadrado de ésta; por lo tanto:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 1 - v^2.$$

En consecuencia, si llamamos M a la nueva masa variable, podemos sentar que:

$$M = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Aquí la variación de la masa, de acuerdo con la velocidad, está puesta en evidencia. A medida que ésta aumenta, la masa aumenta también, y cuando la velocidad del móvil se hace igual a la de la de la luz, la masa se hace infinita. Podemos transformar la expresión anterior, desarrollándola en serie; el desarrollo es como sigue:

$$M = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2}} = m + \frac{1}{2} mv^2 + \frac{3}{8} mv^4 + \ldots.$$

El tercer término y los siguientes, debido a su pequeño valor en los casos corrientes, pueden ser suprimidos sin mayor inconveniente. Vemos, pues, que la masa variable, la masa nueva que hemos hallado, es igual a la antigua más una expresión que resulta ser la energía cinética. Es decir, que la masa, en la teoría de la relatividad, es igual a la masa estática más la energía cinética.

Nos encontramos aquí con la suma de una masa con una energía, y eso nos hace sospechar que la masa sea también una energía, porque dos cantidades de distinta naturaleza no pueden sumarse entre sí. De esto se deduce que la masa estática puede considerarse como una energía poseída por el cuerpo en estado de reposo, y esa energía sería intramolecular, es decir, producida por las pequeñas fuerzas que mantienen en su sitio las partículas del cuerpo: las fuerzas eléctricas de que hemos hablado al explicar la teoría de los electrones.

Esa masa o energía estática es enormemente grande. La energía de un kilógramo de carbón, en reposo, es de 23 mil millones de calorías. De modo que si pudiéramos, en lugar de quemar el kilogramo de carbón, con lo cual no hacemos más que aprovechar su energía química, desintegrarlo, empleando su energía intramolecular, podríamos obtener una economía en la proporción de 4.000000 a 1, puesto que cada kilógramo produciría la energía de 4000 toneladas. Es natural que, para que este problema sea soluble, se necesitan todavía laboriosos trabajos científicos, y el día en que sucederá, debe estar, probablemente, aún muy alejado.

El aumento de la masa con la velocidad explica la disminución en el efecto producido por una fuerza, aplicada a un cuerpo. En la mecánica clásica, cuando se aplica a un cuerpo una fuerza constante, ella le imprime una aceleración también constante, es decir, que la velocidad de dicho cuerpo aumentará un mismo valor en cada unidad de tiempo. De acuerdo con la fórmula de la relatividad, eso no sucede: la fuerza imprimirá una aceleración decreciente al cuerpo, puesto que la masa de éste va aumentando con la velocidad. Es decir, que, si en el primer segundo su velocidad aumenta en una cierta cantidad, en el siguiente, dicho aumento es menor y así hasta extinguirse.

Ahora bien, a medida que la velocidad del cuerpo se va acercando a la de la luz, su masa tiende al infinito, de modo que la fuerza, por más que su acción se prolongue, no podrá hacer de modo que dicha velocidad sea sobrepasada. Es una nueva comprobación de que c es un valor límite.

De la misma manera que la masa de un cuerpo aumen-

ta con la velocidad, debido a la energía cinética que dicho cuerpo adquiere, ella aumenta también con la energía recibida por radiación. Si un cuerpo, por radiación, se calienta o electriza, viene a recibir una cantidad de energía que se transforma en masa, aumentando el valor de la primitiva.
Dada la masa por la fórmula:

$$M = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2}},$$

si el cuerpo recibe por radiación la cantidad de energía E, ella se transformará en:

$$\frac{m + E}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

De este modo se explica que los cuerpos calientes sean más pesados que los fríos y los cargados de electricidad lo sean más que los cuerpos no electrizados. Una comprobación de este aserto la constituye las sustancias radioactivas. El radio, por ejemplo, emana calor, y a medida que lo hace, disminuye de peso. Este fenómeno es provocado por la disminución de la masa producida por la emanación de energía bajo forma de calor.

Terminado este tópico, vamos a entrar al estudio de la nueva ley de gravitación.

La ley de gravitación universal de Newton, a medida que avanzaba la nueva doctrina, iba siendo cada vez menos satisfactoria. Por ejemplo, esa ley hablaba de la masa, y sabemos que ésta no es constante, sino variable. ¿A qué masa se refiere la ley de Newton? ¿A la de los planetas en movimiento, o en reposo? Primer caso de vaguedad.

Las distancias son relativas; varían de un observador a otro. ¿A qué distancia se refiere la ley de Newton? ¿A la que existe de la Tierra al Sol, medida desde la Tierra, o medida desde el Sol, o medida por un observador inmóvil en el espacio? Segundo caso de vaguedad.

El tercer caso está en el desconocimiento de la veloci-

dad con que se propaga la gravitación. En la teoría newtoniana se suponía que esa velocidad era infinita. Sin embargo, se ha comprobado después, que no existe la propagación de fuerzas en esa forma, sino que todas ellas se comunican con una velocidad finita. En relatividad se supone que la gravitación se propaga con la misma velocidad que la luz, no habiéndose encontrado hasta ahora ningún inconveniente en esa hipótesis.

Sin embargo, la ley de Newton daba resultados sorprendentemente exactos. En su aplicación a los fenómenos astronómicos no se encontraba falla alguna, salvo en ciertas pequeñas irregularidades del movimiento de la Luna, que no pudieron ser explicadas, y especialmente en la variación del perihelio de Mercurio. Fuera de esas pequeñas diferencias, la ley de Newton daba resultados exactos, de modo que la nueva, debía, como condición primordial, dar resultados muy aproximados a los de aquella.

Para entrar al estudio de la nueva ley de gravitación, debemos acostumbrarnos primero a una notación condensada, que es la que se va a usar en todas las fórmulas. Vamos a indicar dicha notación para la fórmula del intervalo, ya conocida. Escribamos esa fórmula:

$$ds^2 = g_{11}\, dx_1^2 + g_{22}\, dx_2^2 + g_{33}\, dx_3^2 + g_{44}\, dx_4^2 + 2 g_{12}\, dx_1\, dx_2 + 2 g_{13}\, dx_1\, dx_3 + 2 g_{14}\, dx_1\, dx_4 + 2 g_{23}\, dx_2\, dx_3 + 2 g_{24}\, dx_2\, dx_4 + 2 g_{34}\, dx_3\, dx_4.$$

En la notación condensada, dicha fórmula se escribirá de la manera siguiente:

$$ds^2 = g_{rs}\, dx_r\, dx_s.$$

Esto quiere decir que, en la expresión del segundo miembro, habrá que darle todos los valores posibles, de 1 a 4, a los sub-índices *r* y *s* y sumar todos los términos que resulten. Los primeros cuatro términos del segundo miembro de la fórmula aparecen así, sin dificultad. Después surgirán dos de la forma siguiente:

$$g_{12}\, dx_1\, dx_2, \qquad g_{21}\, dx_2\, dx_1,$$

los cuales, si hacemos la hipótesis $g_{12}=g_{21}$, se sumarán, dando el 4.º de la fórmula.

De esa manera simbolizamos los diez términos en uno sólo.

Tenemos que empezar ahora, a citar las expresiones complicadas que entran en la ley de gravitación relativista. El origen de esas expresiones se encuentra en la llamada *Teoría Tensorial,* en cuyo estudio es imposible que entremos, por la sencilla razón de que, para hacerlo, necesitaríamos un curso completo. Sírvanos de disculpa el hecho de que hayan textos sobre la teoría de la relatividad, que comprenden un año de estudio, en los cuales la teoría tensorial no aparece.

Vamos pues a establecer las expresiones, cuyo origen, como decimos, no podemos investigar.

Se llama *símbolo de tres índices, de segundo género, de Christoffel,* una expresión que se escribe así:

$$\left\{\mu\ \nu,\ \lambda\right\}=\frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}\left(\frac{\delta g_{\mu\alpha}}{\delta x_\nu}+\frac{\delta g_{\nu\alpha}}{\delta x_\mu}+\frac{\delta g_{\mu\nu}}{\delta x_\alpha}\right).$$

Los términos encerrados dentro del paréntesis del segundo miembro son las derivadas parciales de los potenciales que entran en la fórmula del intervalo, que sabemos son función de las coordenadas. El significado de la expresión $g^{\lambda\alpha}$ es el siguiente. Los potenciales, en la fórmula del intervalo, son diez, pero si admitimos la distinción que origina la notación condensada, resultan diez y seis. Esos diez y seis coeficientes, ordenados según sus dos sub-índices, forman una matriz de 4.º grado, que se llama g. La expresión $g^{\lambda\alpha}$ es el cociente de dividir el determinante menor del término $g_{\lambda\alpha}$ por g.

Este símbolo de Christoffel sirve de base para llegar a la fórmula de la gravitación universal, y por eso lo descri-

bimos. Ahora podemos formar lo que se llama el *tensor de Riemann-Christoffel*:

$$B^{\varrho}_{\mu\nu\sigma} = \frac{\delta}{\delta x_\nu}\left\{\mu\ \sigma,\ \varrho\right\} - \frac{\delta}{\delta x_\sigma}\left\{\mu\ \nu,\ \varrho\right\} + \left\{\mu\ \sigma,\ \varepsilon\right\}\left\{\varepsilon\ \nu,\ \varrho\right\}$$

$$- \left\{\mu\ \nu,\ \varepsilon\right\}\left\{\varepsilon\ \sigma,\ \varrho\right\}.$$

Como se ve, es una expresión formada por los símbolos de Christoffel y sus derivadas con respecto a las coordenadas.

Es una convención en esta notación condensada, que cuando aparecen dos índices iguales en un mismo término, se debe hacer la suma de todos los términos de la misma especie, para los cuatro valores de los índices, 1, 2, 3, 4. Por ejemplo, en el tercer término del 2.° miembro, habrá que sustituir ε por 1, 2, 3, 4 y sumar los cuatro términos que resulten.

El tensor de Riemann-Christoffel representa la friolera de 256 expresiones distintas que se pueden formar con todas las combinaciones posibles de los índices, dándole los valores de 1 a 4; pero entre ellas hay cólo veinte independientes: las otras se deducen de las primeras. Esas veinte expresiones igualadas a cero, son las veinte condiciones de que hablamos en la última lección, las que, una vez cumplidas, hacen que la fórmula del intervalo de donde provienen, se refiera a un especio-tiempo euclidiano.

Llegamos ahora a la ley de gravitación. El grupo de condiciones que acabamos de definir podría haber constituído esa ley si el mundo tetradimensional hubiera sido euclidiano; pero sabemos que, a pesar de que él es aproximadamente así en puntos infinitamente alejados de las masas gravitantes, en la proximidad de ellas no lo es. Por eso, ésta no puede ser la ley de gravitación. Hay que buscar expresiones parecidas, que indiquen las propiedades que posee el espacio-tiempo, tanto en las proximidades de las masas gravitantes, como en las zonas alejadas de ellas.

Como no podemos tampoco investigar el origen de las nuevas expresiones, vamos a ver las normas que guiaron a Einstein en dicho hallazgo. Esas normas fueron dos. Primero, como lo que se trataba de buscar eran expresiones que determinaran la naturaleza el Universo, y que no debían tener, en consecuencia, relación con ningún sistema de coordenadas particular, dichas expresiones, que traducirían la ley de gravitación universal, debían ser de tal naturaleza que resultaran invariantes, a pesar de que se cambiara de sistema de ejes coordenados, es decir, que una vez halladas para un intervalo determinado, si midiéramos de nuevo ese intervalo, pero en otro sistema — en cuyo caso el valor del intervalo se mantendría constante, pero no así los potenciales, — cambiando los potenciales primitivos por los nuevos en las fórmulas de la ley, ésta debía aún cumplirse. Esta condición restrictiva, tan simple como parece, es rigurosísima. Se puede decir que ninguna expresión que uno podría idear, es capaz de someterse a ella, porque, como en la teoría generalizada, los sistemas de ejes coordenados son completamente arbitrarios, es decir que se puede pasar de un sistema a otro, en la forma más amplia imaginable, existiendo la única condición de que las nuevas coordenadas sean función de cualquier naturaleza de las primitivas, por ser todos los movimientos válidos, se comprenderá que se necesitan realmente unas expresiones que reunan condiciones particularísimas para que la ley, cumpliéndose con los potenciales correspondientes a un sistema, se cumpla también con los que correspondan a otro que tenga tan poca relación con el anterior.

La segunda norma fué la siguiente: como el Universo, en zonas muy alejadas de las masas gravitantes, es casi rigurosamente euclidiano, la ley tendría que ser válida para esas regiones, es decir, que ella tendría que cumplir, como caso particular, las veinte condiciones del espacio - tiempo euclidiano.

Esas fueron las dos normas que guiaron a Einstein para hallar su magnífica ley de gravitación; pero tuvo que bus-

car el recurso matemático y lo encontró en la teoría tensorial. Las expresiones que se someten a esas condiciones tan severas, se llaman *tensores contractados de Riemann-Christoffel.* Este tensor contractado es igual al definido anteriormente, pero con la particularidad de que tiene dos índices iguales; se escribe:

$$G_{\mu\nu} = B^{\varrho}_{\mu\nu\varrho}$$

Este cambio, al aparecer dos índices iguales, de acuerdo con la notación condensada, trae la siguiente modificación: que ahora habrá que sustituir ϱ por 1, 2, 3, 4, y sumar las cuatro expresiones resultantes. Así que el nuevo tensor viene a ser, en realidad, la suma de cuatro de los anteriores. De estas expresiones hay solamente diez distintas, pero de ellas, cuatro son consecuencia de las otras seis. De modo que la ley de gravitación, que está constituída por la condición de que los tensores contractados sean simultáneamente nulos, se compone de seis relaciones distintas.

Estas relaciones, que escritas en forma esplícita, serían sumamente largas y complicadas, resultan ser las condiciones pedidas: al hacer un cambio de coordenadas cualquiera, y al sustituir los nuevos valores de las *g*, las fórmulas seguirán manteniéndose exactas, y, por otra parte, dichas fórmulas son aplicables al espacio-tiempo euclidiano, puesto que si todas las *B* son nulas, las *G* también lo serán.

La ley de gravitación de Einstein es una ley geométrica; indica las propiedades geométricas del Universo en cualquiera de sus zonas, tanto en aquellas que están próximas a las masas gravitantes, como en las alejadas de ellas. Viene a ser un restricción a todas las geometrías posibles; viene a ser una regla de cómo debe comportarse geométricamente el espacio-tiempo, es decir, el mundo de cuatro dimensiones. Es, finalmente, la norma que debemos seguir para medir los intervalos en nuestro Universo.

Pero las fórmulas que expresan la nueva ley son suma-

mente complicadas, y no tenemos por qué ocultarlo. No vamos a llegar al extremo de los defensores de la relatividad, que dicen que la ley de gravitación universal de Einstein es más simple que la de Newton.

La causa de la complicación de las fórmulas de la ley se explica en la forma siguiente. Se sabe que un principio, una regla cualquiera, cuanto más general, es más complicado. Recordemos que en todas las ciencias puras sucede que, si queremos hacer una ley general, a medida que vamos obteniendo su generalidad, obtenemos su complicación, hasta el punto de que muchas veces se sacrifica aquella y se hace una ley particular para que sea más simple. La ley de gravitación de Einstein es tan universal, abarca todos los fenómenos en una forma tan condensada, que por esa misma razón tiene que resultar complicada.

Ahora veremos que, en cuanto dejamos la generalidad un tanto exagerada a un lado, y vamos a un caso más particular — que a pesar de ello es muy general comparado con otras leyes, — la de Einstein se simplifica notablemente poniéndose al alcance de todos.

Vamos a estudiar el caso particular del campo de gravitación engendrado por una partícula, es decir, por una masa gravitante reducida a un punto. Es claro que él comprende el campo producido por una distribución esférica, homogénea, de la masa, y por lo tanto, podrá expresar aproximadamente la gravitación existente alrededor de todos los astros.

Para hallar la ley en este caso, emplearemos coordenadas polares. Pero, como el Universo no es euclidiano, no serán rigurosamente coordenadas polares: serán las cantidades que en la geometría no euclidiana se acercan más a dichas coordenadas de la euclidiana.

Las normas para hallar la fórmula del intervalo — que es lo primero que necesitamos,—son las dos siguientes. Primero, el campo de gravitación existente alrededor de una partícula, debe ser independiente del tiempo, es decir, que a medida que el tiempo transcurre, él no debe variar en un

mismo punto. Esta norma simplifica la fórmula, porque hace de modo que el tiempo no pueda figurar en la composición de los potenciales. Los coeficientes deben ser independientes del tiempo, para que no se altere la gravitación al transcurrir aquel.

La segunda norma es que el campo debe ser independiente con respecto a la dirección que se tome al través de la partícula o Sol, como la llamaremos en lo sucesivo. En efecto, en una recta cualquiera que pase por el Sol, a la misma distancia de éste, debe existir la misma intensidad del campo. Esto impone una limitación en cuanto a la coordenada angular: ella tampoco debe entrar en la composición de los potenciales, porque si lo hiciera, al cambiar la dirección, variarían aquellos, y en consecuencia la intensidad del campo.

En esta forma, si admitimos además que la órbita de los planetas es plana — cosa que se descubriría en las fórmulas si afirmáramos lo contrario, — la ecuación del intervalo queda reducida a sólo tres términos, que serán:

$$ds^2 = f(r)\ dr^2 + \varphi(r)\, d\Theta^2 + \psi(r)\ dt^2.$$

Tenemos ahora que hallar el valor de los potenciales que están simbolizados por tres funciones distintas de r. El segundo, podemos determinarlo arbitrariamente en la siguiente forma: como de acuerdo con la relatividad, la distancia r puede ser medida por observadores distintos que obtendrán para ella todos los valores posibles, podemos medir esa distancia de tal modo que:

$$\varphi(r) = -r^2.$$

Esta hipótesis es posible, tratándose de un solo potencial. La fórmula, pues, quedará transformada como sigue:

$$ds^2 = f(r)\ dr^2 - r^2 d\Theta^2 + \psi(r)\ dt^2.$$

Para despejar los dos potenciales que permanecen aún desconocidos, tendríamos que escribir las fórmulas de la ley de Einstein para este caso, es decir, hacer en ellas siete coeficientes iguales a cero y darle a los tres restantes los valores que tienen en la última ecuación. De esa manera se pueden calcular $f(r)$ y $\psi(r)$, que resultan tener por valores:

$$f(r) = -\frac{1}{\gamma}, \qquad \psi(r) = \gamma,$$

siendo

$$\gamma = 1 - \frac{2m}{r},$$

y *m*, la masa de la partícula que produce la gravitación.

Por lo tanto, la fórmula viene a ser en definitiva:

$$ds^2 = -\frac{1}{\gamma} dr^2 - r^2 d\Theta^2 + \gamma\, dt^2.$$

Esta ecuación, muy sencilla como vemos, nos permitirá investigar todas las particularidades que presenta el movimiento de los cuerpos en el campo que se está estudiando.

Vamos a hacer primeramente la siguiente operación. Supongamos que, habiendo tomado una unidad de medida material, la colocamos sucesivamente en dirección radial, desde un punto cualquiera hacia el Sol. En esas condiciones, podemos suponer que el tiempo sea constante, por lo cual suprimiremos el último término del segundo miembro de la fórmula. También podemos suprimir el segundo, porque, siendo la medida que tomamos, radial, $d\Theta$ es nulo. La ecuación queda, pues, reducida a:

$$ds^2 = -\frac{1}{\gamma} dr^2, \qquad \text{o}$$

$$dr^2 = -\gamma\, ds^2.$$

Empezaremos la operación con un valor de r suficientemente grande, y a medida que nos vamos acercando al Sol, resultará que γ se va haciendo cada vez menor, tendiendo a cero. A medida que vamos trasladando la unidad de medida, resultará, pues, que dr se hace cada vez más pequeño. Llega un momento en que r iguala en valor a $2m$; en este punto γ se anula y dr también. No podemos adelantar más, una vez llegados a la circunferencia de radio $2m$: a pesar de que sigamos colocando la unidad de medida dirigida hacia el Sol, no progresaremos nada. Se interpreta esa detención, esa parada, ese poder de impedirnos aproximar más, suponiendo que, dentro de esa circunferencia haya materia, y que ella sea la causa que nos impide acercarnos. Es la única interpretación de este fenómeno.

Vemos que en la fórmula del intervalo para este caso particular, aparece el coeficiente γ en dos términos distintos. El efecto que produce γ en esos dos términos, es muy diferente. Hemos dicho ya que el espacio recorrido es muy pequeño, en general, con respecto al tiempo empleado. Basta pensar que un planeta, por ejemplo, recorre treinta o cuarenta kilómetros por segundo, y que dicho segundo estará representado, en cambio, por trescientos mil. De modo que el primer término será muy pequeño con respecto al tercero; luego, es muy natural que la presencia de γ influya más en el último caso que en el otro. Este coeficiente, en el término del tiempo, produce, en el movimiento de los planetas, los efectos predecidos por la teoría de Newton; en cambio, su presencia en el del espacio es la razón de las diferencias que existen entre la nueva ley y la antigua. Esas diferencias son muy pequeñas; solamente tratándose de grandes velocidades, se hacen bien apreciables.

Hay un caso en que el efecto producido por el coeficiente se hace tan grande en un término como en el otro: es el de la propagación de un rayo luminoso. En efecto, sabemos que un rayo de luz recorre tanto en el espacio como en el tiempo y, por lo tanto, la influencia de γ será igual en los dos términos. Esto lo veremos con más detalle en la próxima diser-

tación, cuando tratemos la desviación de los rayos luminosos debido a las masas gravitantes.

Ahora, de la fórmula, podemos deducir lo que ya anunciamos: que, debido a la gravedad — que hace que el espacio-tiempo no sea euclidiano, — resulta que la relación de la circunferencia al diámetro, no es igual a π. Para eso vamos a hacer dos medidas: una, tangencial, recorriendo toda la circunferencia y otra, radial, midiendo el radio. Supongamos que se hacen esas medidas prescindiendo del tiempo; tomaremos en cuenta, pues, solamente los dos términos que se refieren al espacio. Al hacer la medida de la circunferencia, el primer término se anula, quedando la fórmula reducida a:

$$ds^2 = - r^2 d\Theta^2.$$

Durante la operación, el ángulo Θ variará de cero a 2π; luego, el valor total del intervalo, será:

$$s = 2\pi r.$$

Como hemos eliminado el tiempo, resulta que el intervalo es igual al espacio recorrido; de modo que la longitud de la circunferencia resulta la misma que en la geometría euclidiana.

Midamos el radio. Al hacerlo, viene a suceder la inversa: el término nulo es el del ángulo, y podemos suprimirlo. Escribiremos, pues:

$$ds^2 = - \frac{1}{\gamma} dr^2,$$

o, integrando de o a r:

$$s = - \frac{1}{\gamma} r.$$

Vemos que el valor del intervalo, que en este caso también

es igual al espacio recorrido, o sea al radio, por el hecho de ser γ menor que la unidad, es mayor que el radio de la geometría euclidiana De modo que, siendo el radio mayor de lo que debía ser, la relación de la circunferencia al diámetro es menor que π, sucediendo esto siempre que haya gravitación.

Para evitar el inconveniente de medir el diámetro o el radio, al través de la partícula, emplearemos una circunferencia que sea ligeramente excéntrica con ella, lo cual nos dará un grado de aproximación suficiente.

Según dijimos antes, el hecho de que la relación de la circunferencia al diámetro no sea igual a π, es otra comprobación de que la geometría del mundo tetradimensional no es euclidiana.

No sólo el espacio-tiempo es no euclidiano, sino que en este caso, por haber descartado el término temporal y haber hecho solamente medidas de espacio, deducimos que éste sólo, es también de la misma naturaleza. Y esto complica ya las cosas, porque si para medir espacios-tiempos se necesitan objetos en movimiento, para medir el espacio sólo, basta una regla graduada. Así que las medidas que se pueden tomar estáticamente, resultan, también, no euclidianas. Fué lo que sospecharon los fundadores de esta geometría, fué lo que vislumbró Gauss, el cual, para cerciorarse, hizo un experimento que parecerá infantil.

Gauss, para comprobar el carácter no euclidiano del espacio de tres dimensiones, midió lo tres ángulos de un enorme triángulo, que tenía por vértices las cimas de tres montañas de Alemania; esperaba de ese modo, haciendo la suma de dichos tres ángulos, comprobar que era diferente de dos rectos. Pero los errores cometidos por deficiencia de los aparatos que utilizó, eran mayores que la diferencia buscada, por lo cual la experiencia no dió resultado. Sin embargo, Gauss estaba en lo cierto.

De la fórmula del intervalo que venimos estudiando, se de-

duce la ecuación de la trayectoria de un planeta. Para eso basta escribir que dicho intervalo, de acuerdo con lo que ya sabemos, es una cantidad invariable y máxima; hecho esto, y después de algunas transformaciones, se llega a una ecuación que es la de la órbita de los planetas. Esta fórmula es muy semejante a la deducida de la ley de Newton; se diferencia de ella por un término que tiene de más, término que es justamente el que explica la desviación del perihelio de Mercurio.

La nueva ley de gravitación, lo mismo que la de Newton, demuestra que una partícula, en la proximidad de una masa gravitante, sufre una desviación en su recorrido, tal como si la masa la atrajera. Sin embargo, ahora no podemos hablar

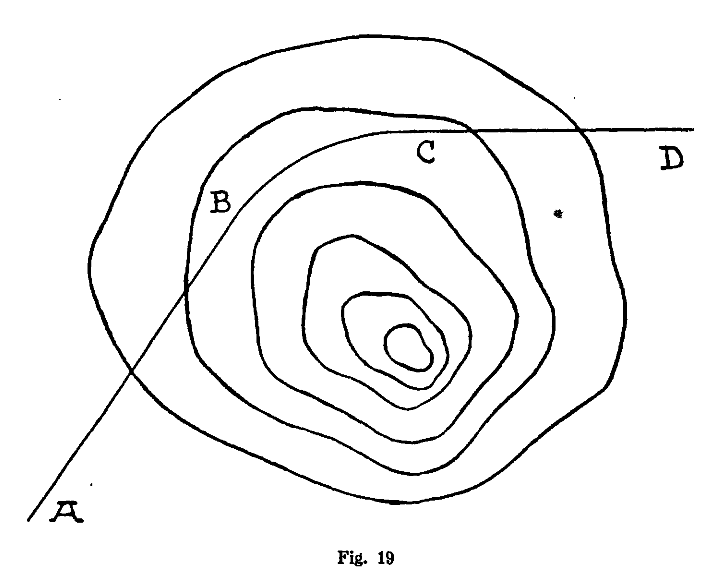


Fig. 19

de atracción, puesto que la fuerza de gravitación de la mecánica clásica, se ha transformado en una propiedad geométrica del Universo. La explicación de ese fenómeno, reducido a dos dimensiones para facilitar su comprensión, es la siguiente.

Supongamos un peatón que tuviera que pasar sobre la

falda de un cerro, llegando a él según el recorrido *A B,* y tratando de pasar sobre dicha falda en línea recta.

Llegado a la cuesta, el peatón involuntariamente tratará de describir una geodésica, una línea de longitud mínima sobre la superficie gausa, por representar ella, el esfuerzo menor. Sabemos que el plano osculador de la geodésica es normal a la superficie, no estando, por lo tanto, dicha curva, en un plano vertical. De modo que el peatón, describiendo la geodésica, trazará una curva *B C,* saliendo de la falda según *C D.* La forma de la trayectoria hace de modo que parezca que la cumbre del cerro atrae al hombre, cuando, en realidad, es lo contrario: para evitar esa cumbre, para describir sobre la falda al camino de mínima resistencia, recorre la geodésica, produciéndose la trayectoria curva. La causa, pues, de la forma del camino seguido, no se debe a ninguna atracción, sino a la configuración geométrica de la falda, que en lugar de ser plana, es gausa.

Este ejemplo en dos dimensiones, ampliado a cuatro, y aplicado a la órbita de los planetas, explicará por qué ellas son curvas. Hará ver que, a pesar de que parece que el Sol atrae a los planetas, ello no es así, sino que ellos tratan simplemente de seguir en el Universo arqueado la línea de menor resistencia, la geodésica, proviniendo, pues, la forma de su trayectoria, exclusivamente, de las propiedades geométricas del espacio-tiempo.

Tenemos ahora que referirnos a la forma del Universo, de acuerdo con la doctrina relativista.

El Universo, según las ideas de Newton, era ilimitado e infinito, es decir, que, por más que se siguiera en una dirección cualesquiera, siempre se podría adelantar. Sin embargo, esa hipótesis, por razones filosóficas y científicas, no satisfacía a muchos hombres de ciencia.

De acuerdo con la relatividad, en cambio, el Universo es ilimitado y finito. Para concebir la simultaneidad de estos caracteres al parecer antagónicos, vamos a describir de nuevo un ejemplo en dos dimensiones, por cuanto es imposible vi-

sualizar los fenómenos en cuatro. Si sobre una esfera, un ser camina en una dirección cualquiera, él podrá continuar su camino indefinidamente, sin encontrar nunca un fin: en ese sentido la superficie de la esfera es ilimitada. Pero en cambio, es finita, porque se presta a ser medida, y tiene un número de unidades de superficie, limitado. El Universo, de acuerdo con la nueva teoría, resulta una cosa análoga, pero de cuatro dimensiones.

De Sitter hizo profundos estudios sobre este tema, y supuso que el espacio-tiempo era esférico. Esto quiere decir que el Universo, no por las características no euclidianas producidas por los astros en pequeñas regiones a su alrededor, sino por una propiedad intrínseca, ajena a toda cuestión de gravitación, es curvo en sus cuatro dimensiones, es no euclidiano en el espacio y también en el tiempo. Pero, como para su concepción, él empleó el tiempo imaginario, resulta que, operando con el real, en lugar de ser esférico en las cuatro dimensionses, lo es solamente en las tres espaciales, siendo hiperbólico en el tiempo.

El Universo de Einstein no es esférico: es cilíndrico. El lo supone curvo en tres dimensiones: las de espacio, y recto en la de tiempo. En esa forma, recto en una dimensión y curvo en tres, se dice, por analogía, que es cilíndrico, por que este sólido tiene la propiedad de ser recto en una dirección y curvo en la otra.

El Universo curvo, finito e ilimitado, considerando solamente las dimensiones espaciales, — porque el tiempo no nos interesa, — podemos concebirlo en la forma siguiente. Supongamos que, encontrándonos en un punto dado, construímos una esfera de radio pequeño; que al lado de ella formamos otra de radio mayor, y así sucesivamente, construímos esferas de tamaño creciente. En un espacio esférico, las esferas, de acuerdo con lo que dijimos ya para la circunferencia, no tienen entre su superficie y su radio, la relación que tienen en la geometría euclidiana. La superficie no es proporcional al cuadrado del radio, sino que es menor de lo que debería ser. Si suponemos que esta carac-

terística se va acentuando a medida que avanzamos, al irse formando esferas de diámetros cada vez mayores, la superficie de dichas esferas, que al principio aumenta, luego se hace estacionaria y en seguida empieza a disminuir. A pesar de que los radios siguen aumentando, las superficies van disminuyendo hasta que la última esfera se reduce a un punto que es la antípode del lugar primitivo, con respecto al Universo. Resultará, pues, que más adelante no se puede ir, porque por más esferas que coloquemos, éstas, como se reducen a un punto, no nos hacen adelantar nada. Por otra parte, no hay barreras que se opongan a que sigamos adelante, sino simplemente la condición geométrica del espacio que hace que se cierre allí, no pudiéndose seguir más adelante.

Vemos por esta concepción que el Universo es ilimitado, que no hay obstáculo que nos impida adelantar en ningún sitio, siendo al mismo tiempo finito, pues llegado a cierto punto, se termina.

Esta hipótesis del Universo naturalmente arqueado, a pesar de que satisface muchas condiciones, complica aún más la teoría, pues siéndolo, en ningún punto, pór más alejado que esté de las masas gravitantes, tendrá aplicación la geometría euclidiana. Resulta entonces que no se cumplirán ya las condiciones necesarias para que el espacio - tiempo sea euclidiano, y en consecuencia, finalmente, las fórmulas de la ley de gravitación de Einstein deben ser modificadas. Los tensores G que antes eran nulos, se harán ahora iguales a una constante, la que determinará, tanto el radio del Universo como su densidad; pero esa constante, cuyo valor no se puede hallar sino con una aproximación muy grosera, es una nueva complicación que obliga a rehacer todos los cálculos. De modo que conviene, en aras de la simplicidad, seguir aceptando la idea de que el Universo es euclidiano a distancias infinitamente grandes de los astros, admitiendo que la ley de gravitación es tal como la habíamos establecido.

De acuerdo con la teoría del espacio curvo, un rayo de luz, saliendo de un punto dado, puede dar la vuelta entera al Universo, volviendo al punto de partida, para cuyo viaje emplearía alrededor de mil millones de años. Esto hace sospechar que muchas de las estrellas que observamos, no sean en realidad, estrellas, sino las imágenes o fantasmas de esos astros, o para darle un nombre, *antisoles*. En efecto, si suponemos que los rayos emanados de una estrella, pudieran dar la vuelta al Unievrso y venir a encontrarse en el mismo punto de donde habían salido — en el cual no se encontrará ya el astro debido a su movimiento, — se comprenderá que esa conjunción de todos los rayos luminosos en un punto, formaría un foco de igual luminosidad que la estrella; se vería pues, en ese sitio, una imagen de ella, como si estuviera aún allí. De acuerdo con esa hipótesis, podríamos ver en puntos del cielo, antisoles, que serían imágenes de estrellas que existieron mil millones, dos mil millones, etc., de años antes que ellas, y que seguirán exactamente los movimientos descritos por los astros correspondientes en aquellas edades remotas.

Sin embargo esta teoría tiene puntos débiles. Los rayos luminosos, al pasar junto a las masas gravitantes, son atraídos y se desvían de su camino, es difícil que en esas condiciones puedan volver, exactamente, al punto de partida. Por otra parte, existe el fenómeno llamado *absorción,* que consiste en un debilitamiento de los rayos de luz, debido al polvo cósmico que inunda los espacios siderales; esto sería otra causa contraria a la producción del fenómeno.

Vamos a explicar ahora, brevemente, los motivos que provocaron la reaparición del éter en la teoría de la relatividad generalizada. Decíamos en la teoría restringida que Einstein, no necesitando para nada el éter en el planteo de sus fórmulas, ignoró por completo su existencia. Sin embargo, en la generalizada, no tuvo más remedio que admitirlo, y eso respondió a la variación en las condiciones geométricas del espacio - tiempo, provocada por la presencia de las masas gravitantes.

Sabemos que las propiedades geométricas del Universo, de un punto a otro, son variables. Para explicar esta diferencia, esta heterogeneidad del espacio - tiempo, es necesario, a la fuerza, admitir que una cierta sustancia lo ocupa, porque, donde no hay sustancia, no puede existir diversidad de caracteres: la materia en cuestión sería el éter.

Einstein admitió pues el éter, pero con el menor número de propiedades posible, simplemente como una materia que tendría por misión permitir que se pongan en evidencia las diferencias entre las propiedades geométricas de las distintas regiones.

LECCIÓN VIII

SUMARIO — Experimentos probatorios de la teoría. — Idea sobre los trabajos de Weyl. — Conclusiones.

Vamos a describir los fenómenos y experimentos que comprueban la teoría de la relatividad generalizada. Ya, al final de la parte correspondiente a la restringida, citamos algunas experiencias que corroboraban ese capítulo de la doctrina. Las que ahora vamos a citar son más importantes, porque testifican la exactitud de la teoría en toda su generalidad.

El primer experimento se refiere a la desviación de los rayos luminosos por la influencia de las masas gravitantes. No hay que creer que esa desviación fué descubierta por medio de la teoría de la relatividad. Ella era conocida desde hace mucho tiempo y se sospechaba desde hace más tiempo aún. El primero que parece tuvo idea de tal fenómeno fué Newton. En su libro "Optica" dice, en forma de interrogación: "¿No obran los cuerpos sobre la luz a distancia y por su influencia desvían sus rayos, y no es esta influencia mayor a menor distancia?" Así pues Newton, sin poderlo comprobar en una forma terminante, debido a la poca perfección de los instrumentos con que contaba, sospechaba sin embargo que la desviación de los rayos luminosos existía, y esto es más notable aún por el hecho de que la teoría de aquel grande hombre no podía explicar el fenómeno de una manera satisfactoria. En efecto, para que la desviación se produzca en un campo de gravitación, es necesario que el cuerpo desviado tenga masa, y no teniéndola la luz, la teoría de Newton no podía dar la razón del hecho.

La explicación, ahora, es sencilla. Hemos visto que la masa se ha identificado con la energía, y que, a su vez, la

energía, tiene masa. Ambas cosas se confunden en una sola. De modo que la luz, siendo energía libre, tiene masa, y ésta es desviada por la acción de las masas gravitantes.

Pero lo interesante para la comprobación de la teoría de la relatividad, es que la desviación de los rayos tiene distinto valor según se calcula por la teoría de Newton (aceptando la equivalencia entre la energía y la masa), o por la de Einstein. No sólo es distinta, sino que es el doble, calculada por la teoría de la relatividad, que por la antigua doctrina.

Para comprender por qué es el doble en un caso que en otro, tenemos que referirnos a la ecuación escrita en la lección anterior, que expresa el intervalo en un campo de gravitación formado por una partícula. Esa ecuación, en coordenadas polares, habíamos visto que era:

$$ds^2 = -\frac{1}{\gamma}\,dr^2 - r^2\,d\,\Theta^2 + \gamma^2\,dt^2,$$

siendo $\gamma = 1 - \frac{2\,m}{r}$, m, la masa de la partícula y r, la distancia a que se encuentra de ella el punto considerado. Dijimos ya que la presencia de γ en el último término, era la causa de los efectos previstos en la teoría newtoniana, y que, en cambio, su existencia en el primero, era responsable de la diferencia entre dichos efectos y los calculados según la relatividad. Hicimos notar también, que la influencia de dicho coeficiente en el primer término era mucho menor, en los casos corrientes, a la producida en el último, porque, para las velocidades comunes, los espacios recorridos son infinitamente pequeños con respecto al tiempo empleado. Tratándose de la luz, en cambio, ambos diferenciales son del mismo orden, puesto que ella se propaga de tal manera que el recorrido espacial es igual al temporal; en estas condiciones, el efecto del coeficiente, en un término y en el otro, será el mismo. Luego, si se calcula la desviación de los rayos según la teoría de Einstein se encontrara un valor doble del hallado basándose en la de Newton. Por

lo tanto, la determinación de uno u otro valor, por medio del experimento que detallaremos en seguida, sería la comprobación de cuál de las dos doctrinas era la verdadera.

Para observar la desviación de los rayos luminosos, debido a las masas gravitantes, es necesario elegir aquellos que pasan junto al Sol, porque los otros astros, o son demasiado pequeños para producir un efecto apreciable, o se hallan a distancias demasiado grandes de la Tierra. De modo que debemos observar una estrella, cuyos rayos pasen tocando el Sol, para poder medir la desviación que buscamos.

Sea *S* el Sol, *T* la Tierra; en *E* hay una estrella que emi-

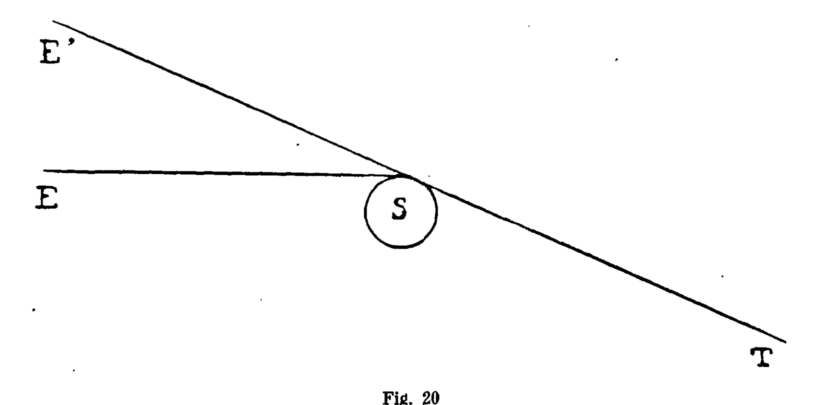


Fig. 20

te un rayo luminoso, el cual, al pasar junto al Sol, se desvía, llegando al lugar donde nos encontramos. Nosotros veremos la estrella en *E'*, en la prolongación del rayo que llega a nuestra retina.

El ángulo que podemos medir, formado por la dirección en que debía estar la estrella y aquella en que la vemos— *E T E'*,—no representa realmente la desviación del rayo, que está dada por el *E S E'*; pero como la distancia de la Tierra al Sol es infinitamente pequeña con relación a la que media entre la estrella y nuestro planeta, los dos ángulos pueden considerarse iguales, o, lo que es lo mismo, podemos considerar que la desviación de la estrella es la del rayo de luz.

Para poder ver estrellas que estén junto al Sol, como se

comprenderá, es necesario recurrir a los eclipses totales, porque, en las condiciones normales, dichas estrellas son invisibles.

La primera prueba que se trató de hacer en este sentido fué llevada a cabo por un astrónomo que, en vísperas de la guerra — 1914, — fué a la península de Crimea, tratando de observar un eclipse total. Pero empezaron las hostilidades, y el astrónomo tuvo que levantar su equipaje sin haber podido estudiar nada.

Después, hubo que esperar a que se repitiera el fenómeno, lo que sucedió recién en 1919. En ese año se produciría un eclipse total muy importante, porque el Sol se encontraría rodeado por un conjunto de estrellas sumamente brillantes, que facilitarían las comprobaciones sobre las pruebas fotográficas que se obtuvieran.

Para ese eclipse se prepararon, en Londres, dos expediciones, organizadas por las sociedades astronómicas inglesas, que son las más perfectas del mundo entero. De ellas, una fue, bajo las órdenes del doctor Crommelin a Sobral, en el Brasil, y la otra, dirigida por Eddington — autor de la obra sobre la relatividad, — tomó rumbo hacia la isla del Príncipe, en el golfo de Guinea, Africa.

Ambas expediciones hicieron sus observaciones con toda prolijidad. Poseían excelentes telescopios, y, enfocando el Sol durante la fase de la totalidad del eclipse, sacaron una serie de pruebas fotográficas, con tiempos de exposición distintos. Expliquemos brevemente el procedimiento para sacar dichas fotografías. Se comprende que, aunque la impresión dure pocos segundos, durante ese tiempo las estrellas se desplazan con respecto a la Tierra, lo que haría de modo que las placas salieran borrosas. Es, pues, necesario que el telescopio acompañe el movimiento estelar, y como esto es difícil, se recurre al expediente de colocar un espejo que refleje los rayos antes de su entrada al aparato, el que posee un movimiento giratorio que anula el del firmamento. Estos espejos se llaman *celóstatos,* y son movidos por un mecanismo de relojería.

La expedición establecida en la isla del Príncipe tuvo la desgracia de que, durante la fase total del eclipse, el Sol estuviera nublado, creyendo en consecuencia sus miembros que las fotografías obtenidas no servirían para nada, y digo que lo creyeron, por cuanto los astrónomos, en esos momentos, se dedican exclusivamente a atender sus instrumentos, sin disponer de un instante para observar el cielo.

La otra expedición, que fué al Brasil, tuvo, en cambio, un tiempo soberbio. Sacó dos series de fotografías con dos telescopios distintos, de las cuales la primera no fué satisfactoria, por estar las placas borrosas, debido a un defecto del celóstato, deformado por el calor. Esa serie no pudo inspirar gran confianza, por esa razón. En cambio, la otra, obtenida con un telescopio mayor, salió perfecta, siendo las pruebas de un tamaño tal, que se pudieron hacer las medidas con toda rigurosidad.

El método para medir las desviaciones de las estrellas, es el siguiente. Una vez obtenidas las fotografías, o antes, se retrata la misma región del cielo, ya sea desde el mismo sitio o en otro lugar de la Tierra, cuando el Sol no está en el campo de la máquina fotográfica, es decir, de noche. Entre esta prueba y la obtenida durante el eclipse, reducidas a un mismo tamaño, deben observarse diferencias en la ubicación de una misma estrella. Para apreciar dicha separación, se superponen las dos películas y, por medio de un aparato especial, se mide la correspondiente a las estrellas más próximas al Sol, después de haber hecho coincidir las imágenes de aquellas más alejadas, que no se han desviado perceptiblemente. Como se comprende las medidas deben ser hechas en una forma rigurosísima.

Ahora bien, el resultado de las experiencias fué el siguiente. La serie de fotografías tomadas en la isla del Príncipe dió, con una aproximación realmente sorprendente, la desviación prevista por Einstein, que es de 1''75, siendo la de Newton de 0''87. En cambio, de los dos grupos de pruebas sacadas en Sobral, el primero, que había resultado defectuoso, dió más o menos la desviación de Newton, lo que

hizo sospechar que la prueba daría un resultado incierto; sin embargo, después, al comprobarse la causa de la imperfección de esas fotografías, se atribuyó la diferencia observada a dicha imperfección. Como compensación de este tropiezo, el otro grupo, que era inatacable bajo todos conceptos, dió, de nuevo, la desviación de Einstein.

Un año después, las sociedades astronómicas de Londres declararon — en una sesión solemne que adquirió los contornos de un apogeo, — que la teoría de la relatividad estaba completamente comprobada.

Según noticias de la prensa, durante los últimos meses del año pasado, debió haber tenido lugar otro eclipse total. Sin embargo, posteriormente no han llegado datos sobre los resultados de las pruebas que deben haberse hecho, pues como es de suponer, desde ahora no habrá un eclipse sin que se hagan observaciones cada vez más perfectas. Sospechamos que la causa de ese silencio ha de radicar en que el eclipse no debe haber sido favorable para el experimento, pues el profesor Eddington, en su obra, dice que el primer fenómeno de esa naturaleza, tendrá lugar en el año 1938. Probablemente se trataba de un eclipse durante el cual el Sol estaría rodeado de estrellas de poca luminosidad, durante el cual, en consecuencia, no se han podido hacer experiencias decisivas.

La segunda prueba de la teoría de la relatividad se refiere a la desviación del perihelio de Mercurio. Sabemos que los planetas recorren órbitas elípticas, pero esas curvas se encuentran modificadas en su forma por la atracción que ejerce sobre el planeta, los demás. De esa manera, Mercurio, que es el más afectado por su gran velocidad y pequeña distancia al Sol, sufre una desviación secular de su perihelio, de 574'', en el mismo sentido de su movimiento. Esto quiere decir que la órbita entera gira sobre sí misma, en el mismo sentido del movimiento de traslación del planeta, de modo que un punto de ella — por ejemplo, el perihelio, — se desplaza de dicho ángulo, en un siglo. De

esta desviación, la parte correspondiente a las influencias de los demás planetas, era de 531'', quedando solamente por explicar, los 43'' restantes.

Esta misma desviación, no explicable, de las órbitas de los demás planetas, es tan pequeña, que materialmente es imposible hacer estudios sobre ella.

El desplazamiento del perihelio de Mercurio, resultó ser, durante mucho tiempo, una pesadilla para los astrónomos, hasta el punto de que, para explicarla, se llegaron a idear teorías especiales. También se propuso modificar la de Newton, sustituyendo el potencial 2 de su fórmula por un número fraccionario muy próximo a dicha cantidad.

Leverrier, descubridor de planetas, supuso que esa desviación inexplicable se debía a la presencia de uno intramercurial, que no sería fácilmente visible. Ese planeta, que fué denominado de antemano Vulcano, no pudo observarse jamás, y después, pudo comprobarse que no existía. De modo que quedaba en pie el problema, imposible de resolver.

Ahora bien, la ecuación relativista de la órbita de los planetas, de que ya hemos hablado, se diferencia de la correspondiente de la teoría de Newton, por un término, y el valor de dicho término, calculado para Mercurio, da exactamente 43'' por siglo. De modo que la doctrina de Einstein, si ninguna explicación ni violencia, aclara una cosa que durante muchos años no pudo ser explicada, y de la manera más fácil y sencilla.

Es un caso igual, en síntesis, al del experimento de Fizeau, el cual, según vimos, no pudo ser dilucidado durante muchísimos años, y que, por la simple aplicación de una fórmula de composición de velocidades, se explica en la forma más simple posible.

La interpretación física de la desviación del perihelio de Mercurio es muy sencilla, si nos conformamos con que no sea muy rigurosa. Sabemos que, alrededor de las masas gravitantes, el Universo es arqueado, es no euclidiano; ¿qué forma tendrá la órbita de un planeta en esas condiciones? Para averiguarlo, tomaremos una hoja de papel recortando una elipse; para que ésta pueda tomar la forma gausa co-

rrespondiente a la geometría no euclidiana, hacemos un corte desde el perihelio al Sol, es decir, desde un extremo del eje mayor al foco más próximo. Ahora, curvamos un poco la elipse, y veremos que los bordes del corte que hemos hecho montan uno sobre otro, resultando una pequeña parte de la órbita superpuesta sobre la otra. Esa parte superpuesta constituye justamente la desviación del perihelio.

Esta interpretación, muy clara, está dada en dos dimensiones: por eso decíamos que no era rigurosa. Hay que ampliarla a cuatro dimensiones, para comprender, en toda su exactitud, el fenómeno; sin embargo, es lo suficientemente explícita para hacer comprender por qué el perihelio se adelanta cada año un cierto ángulo.

La tercera prueba de la teoría se refiere a la desviación de las rayas del espectro. Sabemos que el espectro contiene una serie de rayas sumamente finas, cuya posición y distribución están perfectamente determinadas por la teoría de la relatividad, según dijimos ya.

Ahora bien, la luz es producida por la vibración de los átomos, y de la teoría de la relatividad se deduce que esas vibraciones deben ser más lentas en el Sol que en la Tierra. En efecto, hemos dicho que los fenómenos de gravitación son análogos a los de aceleración; por lo tanto un átomo, colocado en un lugar de gravitación más intensa, un átomo que puede compararse a un reloj, porque vibra de una manera isócrona, tendrá que vibrar más lentamente, tal como un reloj, en un sistema que se mueve a mayor velocidad, tiene un ritmo más lento. Esto se deduce también de la fórmula del intervalo:

$$ds^2 = -\frac{1}{\gamma}\,dr^2 - r^2\,d\,\Theta^2 + \gamma\,dt^2,$$

en la cual, por considerar un átomo en reposo, desaparecen los dos primeros términos del segundo miembro, quedando reducida a:

$$ds^2 = \gamma\,dt^2.$$

Supongamos que esta fórmula se refiere al Sol, y para la Tierra escribamos:

$$ds^2 = \gamma' \, dt'^2,$$

teniendo *ds* el mismo valor, por ser una invariante; de estas dos ecuaciones, deducimos:

$$\frac{dt^2}{dt'^2} = \frac{\gamma'}{\gamma},$$

la cual prueba lo afirmado, si se recuerda el significado de γ.

En consecuencia, la luz solar, y la producida por un foco terrestre, deben presentar caracteres distintos. La primera, por ser producida por vibraciones más lentas, tendrá longitud de onda mayor, y eso provocará una cierta desviación conjunta de las rayas del espectro, hacia el rojo.

En resumen, si todo lo dicho era cierto, el espectro solar debía presentar todas sus rayas desviadas hacia el lado del rojo, con respecto al de un foco terrestre.

Este fenómeno no pudo ser verificado por muchos años. La experiencia para descubrirlo fué repetida, en numerosos laboratorios, con aparatos perfeccionadísimos, siempre con resultados, si no francamente negativos, por lo menos, muy dudosos. Era, pues, la desesperación de los relativistas, hasta el punto de que muchos autores trataron, disculpando la teoría, de explicar el resultado, no satisfactorio, del experimento.

Sin embargo, Einstein, con una nobleza que realmente lo ensalza, mantenía su opinión de que el experimento debía ser comprobado, y que, si no lo era, eso sólo, produciría el derrumbe de su doctrina. He aquí un párrafo de un discurso suyo, leído en la Universidad de Leyde en los primeros meses de 1920: "Si el desplazamiento de las rayas del espectro hacia el rojo no existiera, la teoría de la relatividad generalizada no podría sostenerse".

De modo que él, yendo en contra de su conveniencia, pero permaneciendo fiel a su ideal, sostenía que si el fenómeno no se comprobaba, su doctrina quedaría anulada.

Felizmente el experimento parece haber sido realizado ya con éxito, hace poco tiempo, por el físico francés Pérot, el cual hizo una serie de experiencias notables en el observatorio de Meudon. Pérot vino a descubrir la falla por la cual no se había podido probar antes la desviación, y esa falla consistía en que no se había tomado en cuenta la presión que existe en las capas gaseosas del Sol. Parece que el experimento es concluyente, y constituye, por lo tanto, la tercera prueba, que, como hemos visto, era tan esencial para Einstein.

Terminada la descripción de los tres experimentos probatorios de la teoría generalizada, que, como se ve, no se refieren a cosas corrientes, sino a altas especulaciones de la ciencia, vamos a dar una idea somera de los trabajos de Weyl, el continuador de Einstein.

Einstein — en la conferencia que acabo de citar, que versaba sobre el éter, — dijo que era lamentable que la electricidad no figurara en la teoría, a la par de la gravitación. La electricidad es un fenómeno general que existe donde haya materia, puesto que, según la teoría de los electrones la materia no es sino electricidad. De modo que el hecho de que, para explicar los fenómenos eléctricos haya que aplicar, en relatividad, fórmulas especiales, es una falla de la doctrina. La electricidad debía ocupar un lugar preponderante en la teoría, al lado de la gravitación, entrando en la constitución de las fórmulas fundamentales.

Todo esto no quiere decir que la relatividad sea reacia a la teoría; por lo contrario, está estrictamente de acuerdo con ella, y sabemos justamente que su origen fué esencialmente eléctrico, estando constituído por las ecuaciones de Maxwell; pero esto no bastaba: era necesario que la electricidad entrara en las fórmulas generales al lado de la gravitación.

Esa fué la obra que acometió Weyl. Este matemático empezó por dudar de uno de los postulados de la teoría generalizada, aquel que dice que el valor del intervalo es una invariante. Sospechó que si dos observadores distintos querían medir una misma cosa, ya fuera espacio o tiempo, el cambio que había que hacer en los instrumentos de medida para pasarlos de un observador a otro, podría producir la variación de los mismos. Es decir, que, si hay un observador en movimiento, y quiere pasar sus unidades de medida para que las emplee otro que está en reposo, por ejemplo, es necesario detener dichas meiddas, para lo cual habrá que aplicarles una fuerza, la que podría alterar la sustancia íntima de dichos cuerpos. Como se ve, volvemos a las ideas de Lorentz sobre la modificación de la materia debido a las fuerzas eléctricas que existen dentro de ella.

Weyl, llevado por esta sospecha, llegó a afirmar que, cuando se quería medir un intervalo en un lugar, y luego, en otro, o en un mismo lugar, pero por dos observadores en distintas condiciones, las unidades de medida tenían que sufrir variaciones, resultando entonces que dicho intervalo no sería una invariante. Esto, como se comprenderá, trae aparejada la modificación de gran parte de la teoría, pues el carácter de invariabilidad del intevarlo es uno de sus postulados básicos.

Weyl dice, más o menos, lo siguiente: si llevamos nuestra medida de un lugar a otro, esa medida variará, y no sólo por el hecho del traslado, sino que la variación dependerá del camino recorrido, según la aceleración que haya que imprimirle a la medida para que haga el viaje, según la trayectoria hecha. La consecuencia de esto será que en cada lugar del Universo existirán unidades de medida distintas.

Weyl toma, para sus cálculos, como unidad de medida fundamental, el intervalo; supone una regla ideal que pueda medir la distancia en el espacio y en el tiempo, es decir, el intervalo, de largo l, y supone que al moverla de tal modo que sus coordenadas varían en cantidades infinitamente pe-

queñas, la longitud de esa regla variará también en una cantidad de la misma naturaleza, siendo la variación, además, proporcional a la longitud primitiva. En una palabra, Weyl supone que, si el largo de la regla para medir intervalos es l, una vez movida de su sitio, será $\lambda\ l$. Trata, luego, de determinar λ, y afirma que dicha cantidad es una función lineal de las diferenciales de las cuatro coordenadas, es decir:

$$\lambda = k_1\, dx_1 + k_2\, dx_2 + k_3\, dx_3 + k_4\, dx_4.$$

Las k tienen que ser, o constantes, o funciones de las coordenadas.

De modo que, intervendrán ahora, cuatro cantidades nuevas, en todos los problemas; estas cantidades van a determinar, bajo otro aspecto, el caracter geométrico del Universo. En lo sucesivo, pues, necesitaremos, para determinar ese carácter, no sólo los diez potenciales g de la fórmula del intervalo, sino cuatro más, las k dadas por la ecuación de la variación del mismo. Son necesarias, pues, catorce cantidades en lugar de diez.

Llegado a este punto, Weyl, por una de esas intuiciones inexplicables, supone que las cuatro nuevas cantidades eran los potenciales electro-magnéticos, los cuatro valores que, en las ecuaciones de Maxwell, determinan el estado eléctrico, la carga eléctrica, de un punto del Universo. Aceptado esto, una vez en posesión de los catorce potenciales, diez de ellos determinarán el estado geométrico del Universo, debido a la gravitación, y los cuatro restantes — las k, — el estado geométrico complementario debido a la electricidad. En esa forma, gravitación y electricidad vendrían a fusionarse, teniendo el mismo lugar e importancia en la doctrina, que era lo que se deseaba conseguir.

La teoría de Weyl, poco conocida todavía, es muy elogiada por la mayoría de los autores relativistas. Algunos han llevado las cosas al extremo, diciendo que el discípulo va a resultar superior al maestro, y que la obra de Weyl, es más

importante que la de Einstein; como se comprenderá, se trata de exageraciones. Pero el hecho real es, que el término medio de los autores le da una importancia extraordinaria, diciendo que completa y aclara la teoría, cuando más bien parece que la complicara, puesto que una serie de fórmulas deben ser modificadas.

La opinión de Einstein, en este asunto, es contraria a la de sus comentadores. Einstein ha dicho textualmente, refiriéndose a la obra de Weyl, y hablando de la unión íntima entre la electricidad y la gravitación, lo siguiente: "Un ensayo muy ingenioso ha sido hecho en ese sentido por el matemático H. Weyl; no creo, sin embargo, que su teoría pueda matenerse frente a la realidad". Como se ve, la opinión de Einsten es desfavorable a la teoría de Weyl: el tiempo dirá cuál de los dos tiene la razón.

Llegado a este punto, me encontraría en el compromiso, para terminar, de tener que arriesgar una opinión sobre la teoría de la relatividad, como es costumbre, en estos casos. Sin embargo prefiero no exponerme a eso. Cuanto más se estudia la teoría, más difícil parece el poder hacer un juicio sobre ella. Es sumamente difícil, sumamente compleja, muy oscura. Está aún incompleta. De modo que es mejor dejar a los tratadistas la tarea de hacer juicios, y no aventurarse a una cosa que sería una empresa realmente arriesgada.

Con todo, vamos a dar algunas ideas generales sobre el asunto, que no comprometen mayormente.

Por lo pronto, la teoría de la relatividad es esencialmente revolucionaria. No es una doctrina como son la generalidad, que complementan o perfeccionan otras anteriores. Por lo contrario, ella anula muchos conocimientos adquiridos, de tal manera que es necesario volver muy atrás, para encauzarnos por la nueva vía. Este es un caracter distintivo suyo, y quizá sea un exponente de su valor.

La teoría de la relatividad presenta otra garantía: el haber sido hecha por hombres de ciencia que no eran especialistas, sino politécnicos. Los sabios que intervinieron en la

formación de la doctrina, poseían conocimientos completamente generales; abarcaban, no sólo la Física, sino la Mecánica, la Matemática, la Astronomía, y todas las ciencias afines. Ahora bien, es sabido que el resultado de la especialización es, en la gran mayoría de los casos, si no en todos, negativo. Y no me refiero exclusivamente a estos de ciencia pura; se trata de un fenómeno general. En efecto, el especialista ve sólo su especialidad y se expone a grandes contratiempos por no conocer a fondo las otras ciencias; su criterio no es amplio, sino limitado. Así, se ha visto que muchas teorías científicas han fracasado ruidosamente porque sus autores, estando empapados en su especialidad y desconociendo las demás, sentaron doctrinas sin relación con las otras ciencias, y que, por esa causa, no pudieron sostenerse por mucho tiempo.

La teoría de Einstein presenta otra enorme ventaja, que es la unidad que impone a todas las ramas de la ciencia. Realmente no hay otra que tome entre sus manos, de esta manera, los hilos de todos los conocimientos dispersos. La relatividad no se apoya sobre una ciencia, sino sobre todas, y todas deben rendirle tributo; ella ha reunido los conocimientos que andaban aislados, viniendo todos a convergir — al decir de Fabre, — como los afluentes al río madre, para expresarse dentro de una misma doctrina.

Los hombres de ciencia se dividen, con respecto a la teoría, en dos grandes bandos: unos partidarios entusiastas, y otros, contrarios hasta la exageración. Estos últimos son muy mordaces; generalmente tratan de hacer mella sobre los puntos más débiles, y uno de los que parece tienen esta cualidad, es el que se refiere a los métodos usados. Especialmente ese empleo tan primordial de la luz como vehículo de la constatación de todos los fenómenos, fué acerbamente criticado; se dice que la luz no tiene por qué figurar en forma tan primordial en la teoría.

Desde el punto de vista filosófico, también se han hecho grandes críticas, pero este tema lo hemos dejado, intencionalmente, por completo a un lado.

Ahora bien, la teoría de la relatividad, ¿será la últi-

ma palabra de la ciencia? ¿No aparecerá más adelante otra más perfecta? Aquí hay un punto muy importante que conviene destacar, que es la imposibilidad, para cualquier teoría, de expresarse, por medio de la notación matemática, en una forma rigurosa.

Fabre, en su libro, hace notar que los físicos, para expresar las leyes de la naturaleza, que son impertérritas, se ven obligados a emplear el lenguaje matemático; hacen, pues, uso de un instrumento, como el matemático, completamente artificioso, para expresar cosas que son reales, naturales, inconmovibles. La matemática es un recurso creado por el intelecto del hombre y, exigir que se amolde estrictamente a los fenómenos físicos, es pedir una cosa completamente imposible.

Vamos a analizar, por ejemplo, la segunda ley de la mecánica clásica: la fuerza es igual a la masa multiplicada por la aceleración. ¿Cómo se descubrió esa ley? Como todas, por experimentación directa; se hicieron medidas para ver qué efectos producía en los cuerpos una fuerza determinada, y se trató de hallar a qué cosa era proporcional esa fuerza. Se observó si era proporcional a la abscisa: no lo era; se indagó si lo era a su primera derivada: tampoco; luego, si era proporcional a la segunda, o sea, a la aceleración: lo era aproximadamente. En los experimentos que se hicieron se comprobó, casi con exactitud, esa relación. Entonces, ya se dijo que la fuerza era igual a la masa multiplicada por la aceleración.

Pero, ¿cómo puede pensarse que una derivada, que es un producto de la inteligencia humana, un artificio matemático creado para simplificar el cálculo, pueda amoldarse estrictamente a una ley física, a una ley de la naturaleza? Es realmente imposible, y tiene que llegar el momento en que se pruebe, con experiencias más pefectas, que el empleo de esa cantidad matemática, no es correcto, y entonces se buscará una expresión más complicada, que se amolde mejor a la ley.

Por eso sospechamos que, a pesar que la teoría de la

relatividad usa el instrumento matemático con toda eficacia, ella, tal vez, más adelante, se encuentre en defecto, y tenga que ser sustituída por otra, en la cual los cálculos y las fórmulas sean más complicados, con el objeto de que se ajusten más a la realidad.

La teoría de Einstein no está completa; lo está. puede decirse en sus líneas generales, pero falta estudiar muchas de sus consecuencias.

Como se ha visto, todas las ciencias tienen que rehacerse, y ese trabajo queda para los continuadores de Einstein, pues él no tendría tiempo, en lo que le queda de vida, para hacerlo. Ya se han hecho ensayos muy completos en el sentido de la mecánica: hay ya una mecánica completa construída sobre la relatividad restringida. Pero las demás ciencias no están tan adelantadas, y en cuanto a las consecuencias de la relatividad generalizada, es muy poco lo que se ha hecho hasta ahora.

No pasarán muchos años sin que en las universidades se estudien — si sigue la teoría al paso que va, — las ciencias basadas sobre la nueva doctrina. Pero sería menester que desde ya, en las clases de materias que tienen atingencia con la relatividad, se diera a los alumnos una leve idea de ella, para que, por lo menos, sepan que las fórmulas que estudian, no son probablemente exactas, y que existe una nueva doctrina que está comprobada ya por varios experimentos, y que será ley, tal vez, en lo sucesivo.

Sobre el genio de Einstein en particular, sobre su personalidad científica, habría mucho que hablar. Einstein es una cumbre de la ciencia: la historia dirá más adelante todo lo que ha sido.

El genio de Einstein está definido magistralmente por estas líneas de la obra de Fabre; dicen: "Se puede definir este genio: una lógica imaginativa, es decir, creadora, llevada al extremo del rigor y de la ingeniosidad, y despreocupada de todas las ideas hasta ahora aceptadas, lógica asociada a una intuición matemática que recuerda la de Abel o Poincaré".

Realmente, lo que más sobresale en la personalidad de

Einstein es su imaginación creadora, y muy especialmente, esa despreocupación que tiene por lo anterior. Es un espíritu completamente libertado de la tradición, que tenía, forzosamente, que hacer algo grande, de tendencia revolucionaria.

Se ha dicho que Einstein es un destructor, que ha producido el derrumbe de todos los conocimientos aceptados. Sin embargo, él modestamente, se llama un continuador; dice que es un continuador de la obra de Newton. Entre esos dos genios, que no son antagónicos, sino paralelos, uno con su imaginación y su cerebro del siglo XVII, y otro con su cerebro y su imaginación del siglo XX, las diferencias existentes no se deben, probablemente, más que al tiempo que media entre sus obras. Si Einstein ha destruído, en parte, la obra de Newton, eso no quiere decir que esa obra no fuera buena, sino que era antigua, solamente. Einstein, hablando de la obra de Newton, dice lo siguiente, con toda reverencia: "La teoría de Newton constituye el paso más considerable que haya sido jamás realizado por el espíritu humano en su esfuerzo por establecer un encadenamiento causal entre los fenómenos de la naturaleza". Sería muy conveniente que las personas que hablan de Einstein como de un destructor de la obra de Newton, leyeran esta frase suya, para que supieran cómo considera a aquel genio.

Hemos llegado ya al fin de este pequeño curso. Como dijimos al principio, no creemos él tenga otro mérito que el haber presentado en un orden lógico, las cuestiones más notables de la relatividad, eligiendo siempre la explicación o demostración más claras, a nuestro juicio.

En cuanto al resultado que pueda tener este ciclo de conferencias, somos bastante excépticos. El ambiente en nuestro país, como hemos dicho antes, no es muy propicio al entusiasmo por las conquistas de la ciencia pura, de modo que sería pueril creer que esta serie de lecciones pueda tener consecuencias fundamentales. Sin embargo, creemos que pueda haber hecho formar una idea bastante completa, sobre la teoría, a aquellas personas que hace tiempo sentían curio-

sidad por ese tópico, no habiendo encontrado ocasión de satisfacerla, y que, tal vez, sea la causa de que algunos estudiosos, aunque sean contados, sigan profundizando el tema, internándose en ese campo, al parecer tan árido, y en realidad, tan placentero.

Si esto hubiéramos conseguido, estaríamos satisfechos.

FIN

BIBLIOGRAFÍA

NÓMINA DE LAS PRINCIPALES OBRAS CONSULTADAS

BONOLA. — La Geometría non-eudidea.

CUNNINGHAM. — Relativity, the electrou theory and gravitation.

EDDINGTON. — Space, time, gravitation.

EINSTEIN. — La Théorie de la Relativité (mise a la portée de tout le monde).

Varios artículos y conferencias.

FABRE. — Les Théories d'Einstein.

NORDMANN. — Einstein et l'Univers.

SCHMIDT. — La prima conoscenza della Relatività dell' Einstein.

SILBERSTEIN. — The Theory of Relativity.

ANALES DE LA UNIVERSIDAD